近现代物理导论
力学
课程笔记

目录

第一章 质点运动学 **1**
1.0 引言 . . . 1
1.1 时间与空间 . . . 1
1.2 位矢、速度与加速度 . . . 2
1.3 平面曲线运动 . . . 9
1.4 柱坐标与球坐标分解 . . . 17
1.5 相对运动 . . . 20
1.6 Galileo 变换与 Lorentz 变换 . . . 24

第二章 牛顿定律 动量定理 **34**
2.1 Newton 定律 . . . 34
2.2 相互作用力 . . . 37
2.3 惯性力 . . . 49
2.4 动量定理 . . . 54

第三章 能量 **58**
3.1 动能定理 . . . 58
3.2 保守力与势能 . . . 62
3.3 静电场环路定理 . . . 64
3.4 机械能定理 . . . 66
3.5 碰撞 . . . 70

第四章 角动量 **76**
4.1 角动量定理 . . . 76
4.2 刚体定轴转动 . . . 82
4.3 有心力场概述 . . . 89
4.4 Kepler 问题 . . . 92

附录 公式定理总结 **101**
1 质点运动学 . . . 101
2 牛顿定律 动量定理 . . . 102
3 能量 . . . 103
4 角动量 . . . 103

第一章　质点运动学

1.0　引言

定义　质点（ Particle ）：有质量的点粒子。

定义　质点运动：空间位置随时间的变化。

粒子在 t 时刻的**运动状态**为

$$\big(\vec{r}(t),\ \dot{\vec{r}}(t)\big),$$

相应地，$\big(\vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}_0\big)$ 为**初始运动状态**。

Zeno 提出**运动佯谬**「飞矢不动」。Newton 把瞬时运动定义为极限

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

质点的运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\big(\vec{r},\dot{\vec{r}}\big),$$

即 $\vec{r}$ 对 t 的二阶微分方程。二阶方程的通解含两组待定常量，由初始运动状态定完，于是给出**经典力学的可预言性**（完备决定论）：$\vec{r}(t>t_0)$ 被唯一确定。

1.1　时间与空间

定义　时间（ Time ）：事物发展的先后顺序（因果律：因先果后）。**空间（ Space ）**：事物排列的相对方位与次序。

时空观：物理上，时空仅是测量的对象。

1.1.1　两种时空观

定义　绝对时空观（ Newton ）：与观测者、物体及其运动无关。

数学上为时间轴与欧氏空间的直积

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3.$$

定义　相对时空观：与观测者、物体及其运动有关。

- Einstein **狭义相对论**：M^{3+1}。非 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$——时间与空间搅在一块。
- **广义相对论**：Riemann 弯曲时空，满足 Einstein 场方程

$$E^{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}\,T^{\mu\nu},\qquad \mu,\nu=0,1,2,3,$$

重复指标依 Einstein 求和约定求和，$E^{\mu\nu}$ 为爱因斯坦张量，$T^{\mu\nu}$ 为**能动张量（ Energy–Momentum Tensor ）**。

1.1.2 时间的度量

定义 (时间的度量) 满足一定规律的演化过程。

取**周期运动**为基准，精度沿以下路线提高：

$$\text{天体} \longrightarrow \text{钟表} \longrightarrow \text{原子钟}$$

1 s 为铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应辐射的 9 192 631 770 个周期的持续时间（相对精度 10^{-15} ）。

1.1.3 空间的度量

米原器 $\longrightarrow$ 原子基准（精度 10^{-9} ） $\longrightarrow$ 依**光速不变原理**定义：

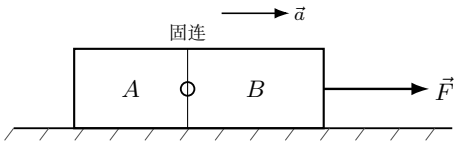
$$1\,\mathrm{m} = \text{光在真空中}\frac{1}{299\,792\,458}\text{ 秒内传播的距离.}$$

1.1.4 参考系与质点化

定义 参考系（ Reference Frame ）：质点（系）运动的背景时空。

质点化的两个条件：

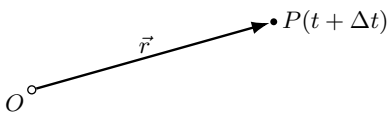
1. **线度可略**。例：日地系统 $r \gg R_{日}$，$R_{地}$。
2. **刚体平动**。两点部位连线方位不变（否则为刚体转动）；运动中两点部位间距不变。选 A 为基点，则整体随 A 平动。



$$F = (m_A + m_B)\,a.$$

1.2 位矢、速度与加速度

选 O 为参考点。



定义 位矢（ Position Vector ），又称**位置矢量**：

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$$

$\Longrightarrow$ **轨道函数**。

在直角坐标系中展开为**参数方程**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t); \end{cases}$$

消去 t 得**轨道方程**

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ f(y,z)=0. \end{cases}$$

例

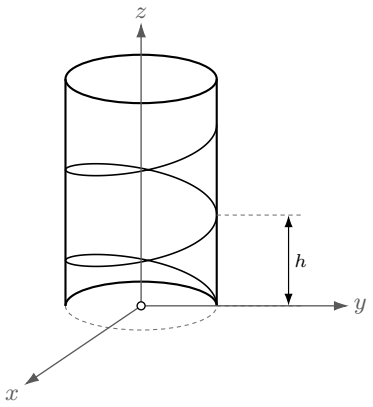
$$\begin{cases} x=R\cos\omega t, \\ y=R\sin\omega t, \\ z=ut, \end{cases} \qquad (R,\omega,u \text{ 为正常量})$$

$\Longrightarrow$

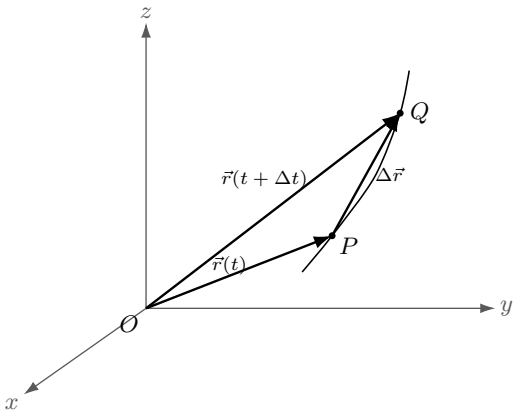
$$x^2+y^2=R^2,$$

即**圆柱面**；配合 $z=ut$ 得**等距螺旋线**，螺距

$$h=u\cdot\frac{2\pi}{\omega}.$$



1.2.1 位移



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t).$$

1.2.2 速度与加速度

速度

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

瞬时速度

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}.$$

加速度

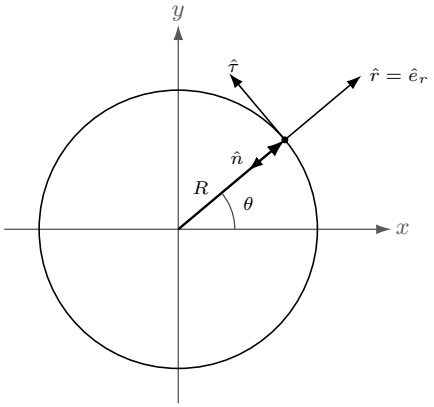
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}, \qquad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

高阶导数沿用 Newton 的点记号， $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\vec{r} = \vec{r}^{(n)}$。

分量式

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z, \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}.$$

1.2.3 圆周运动



约束 $x^2 + y^2 = R^2$ ，自由度 $n_f = 1$ ，取**位置角** θ 为广义坐标：

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\,\hat{x} + R\sin\theta(t)\,\hat{y} = R\,\hat{r}.$$

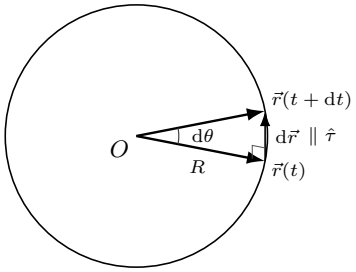
$\hat{\tau}$ 为切向单位矢量， $\hat{n}$ 为（向内）法向单位矢量。

1.2.3.1 匀速圆周运动

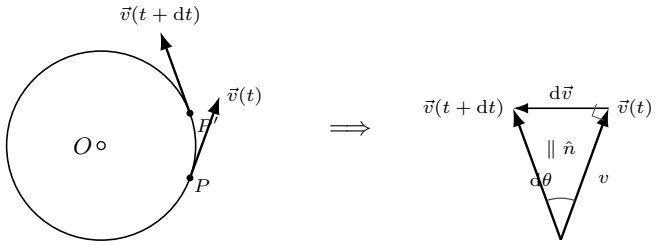
$\theta(t) = \omega t$ ， $\omega > 0$ ：

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = R\cos\omega t\,\hat{x} + R\sin\omega t\,\hat{y},\\
&\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = -\omega R\sin\omega t\,\hat{x} + \omega R\cos\omega t\,\hat{y} = \omega R(-\sin\omega t\,\hat{x} + \cos\omega t\,\hat{y}) = \omega R\,\hat{\tau},\\
&\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\hat{x} - \omega^2 R\sin\omega t\,\hat{y} = -\omega^2 R\,\hat{r} = \omega^2 R\,\hat{n}.
\end{aligned}$$

另（整体式）：由 $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$、$\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t + o(\Delta t)$ ，



$$\Delta\theta = \omega\Delta t, \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{cases} \text{方向：}\ \hat{\tau} \\ \text{大小：}\ R\,\mathrm{d}\theta \end{cases} = R\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega\,\hat{\tau}.$$



$$\mathrm{d}\theta=\omega\,\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}\vec{v}=\begin{cases}\text{方向：}\ \hat{n}\\ \text{大小：}\ v\cdot\mathrm{d}\theta\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\omega v\,\hat{n}=\omega^2R\,\hat{n}.$$

注. 对 $\vec{A}=A\hat{A}(t)$，若 $\dot{A}=0$，则 $\dot{\vec{A}}=\omega A\,\hat{n}_A$（$\vec{A}$ 在平面内旋转），且 $\vec{A}\perp\dot{\vec{A}}$。这由 $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$ 求导即得：

$$2\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0.$$

> $\vec{A}=A\,\hat{A}(t)$ 是把矢量拆成「长度 × 方向」；$\dot{A}=0$ 即「长度不变、只有方向在转」——位矢 $\vec{r}$ 与匀速圆周的 $\vec{v}$ 都属这一类。
>
> **为什么垂直。**对恒等式 $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$ 两边求导：左边按乘积法则得 $\dot{\vec{A}}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}=2\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}$，右边得 $2A\dot{A}$，约去 2 即 $\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}=A\dot{A}$。$\dot{A}=0$ 时右端为零；而 $\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}=|\vec{A}||\dot{\vec{A}}|\cos\phi$，两个模长都不为零，只能 $\cos\phi=0$。
>
> **大小与方向。**末端在半径 A 的圆上以 ω 转，$\mathrm{d}t$ 内走过弧长 $A\omega\,\mathrm{d}t$；$\hat{n}_A$ 就是末端此刻运动的方向：垂直于 $\vec{A}$、在转动平面内，即把 $\hat{A}$ 沿转动方向再转 $90°$。
>
> 本讲用了两次：对 $\vec{r}$，$\hat{n}_A$ 是切向 $\hat{\tau}$，得 $\vec{v}=\omega R\hat{\tau}$；对 $\vec{v}$，把 $\hat{\tau}$ 再转 $90°$ 便指向圆心，得 $\vec{a}=\omega v\,\hat{n}$——向心加速度指向圆心不是额外假设，而是「速率不变」逼出来的。

1.2.3.2 变速圆周运动

$\theta=\theta(t)$，$\omega=\dot{\theta}=\omega(t)$，**角加速度** $\beta=\dot{\omega}=\ddot{\theta}$：

$$\vec{r}(t)=R\big(\cos\theta(t)\,\hat{x}+\sin\theta(t)\,\hat{y}\big),$$

$$\vec{v}=R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y})=R\omega(t)\,\hat{\tau}=v\,\hat{\tau},$$

其中 v 为**速率**（速度大小）。加速度

$$\vec{a}=R\beta\,\hat{\tau}+R\omega\,\dot{\hat{\tau}},\qquad \dot{\hat{\tau}}=\dot{\theta}(-\cos\theta\,\hat{x}-\sin\theta\,\hat{y})=\dot{\theta}\,\hat{n},$$

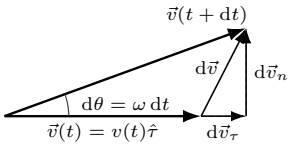
故

$$\vec{a}=R\beta\,\hat{\tau}+R\omega^2\,\hat{n}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n,$$

$\vec{a}_\tau$ 为**切向加速度**，$\vec{a}_n$ 为**向心加速度**。

> $\vec{v}=R\omega\,\hat{\tau}$ 里有两个随时间变的因子（$\omega(t)$ 与 $\hat{\tau}(t)$，只有 R 是常量），故用乘积法则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\vec{u})=\dot{f}\,\vec{u}+f\,\dot{\vec{u}}$：
>
> $$\vec{a}=R\dot{\omega}\,\hat{\tau}+R\omega\,\dot{\hat{\tau}}=R\beta\,\hat{\tau}+R\omega\,\dot{\hat{\tau}}\qquad(\dot{\omega}=\beta).$$
>
> 说的就是：速度的变化有两个来源——快慢在变、方向在变。
>
> **求 $\dot{\hat{\tau}}$。**对 $\hat{\tau}=-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y}$ 求导，$\hat{x},\hat{y}$ 方向固定、导数为零（这正是用直角坐标的好处：方向变化全塞进 $\theta(t)$ 一个标量），故
>
> $$\dot{\hat{\tau}}=\dot{\theta}\big(-\cos\theta\,\hat{x}-\sin\theta\,\hat{y}\big)=\dot{\theta}\,(-\hat{r})=\omega\,\hat{n}$$
>
> （末步用 $\hat{n}$ 约定指向圆心即 $-\hat{r}$）。代回即得 $\vec{a}=\underbrace{R\beta\,\hat{\tau}}_{\text{快慢在变}}+\underbrace{R\omega^2\,\hat{n}}_{\text{方向在变}}$，两项互相垂直、各管一件事。自检：$\beta=0$ 退回匀速情形；又 $v=R\omega$，故 $a_n=R\omega^2=v^2/R$ 是同一个量的三种写法。

整体式：$\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$，



$\vec{v}(t+\mathrm{d}t)=v(t+\mathrm{d}t)\,\hat{\tau}(t+\mathrm{d}t)$,

$$\mathrm{d}\vec{v}=\mathrm{d}\vec{v}_n+\mathrm{d}\vec{v}_\tau=\mathrm{d}v\,\hat{\tau}+v\,\mathrm{d}\theta\,\hat{n},$$

第一个式子只是把 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的速度照样写成「大小 × 方向」。要注意两个因子都带 $(t+\mathrm{d}t)$：这一刻速率变了，切向也转了。

于是令 $v(t+\mathrm{d}t)=v+\mathrm{d}v$、$\hat{\tau}(t+\mathrm{d}t)=\hat{\tau}+\mathrm{d}\hat{\tau}$ ，代入 $\mathrm{d}\vec{v}=\vec{v}(t+\mathrm{d}t)-\vec{v}(t)$ ：

$$\mathrm{d}\vec{v}=(v+\mathrm{d}v)(\hat{\tau}+\mathrm{d}\hat{\tau})-v\,\hat{\tau}=\mathrm{d}v\,\hat{\tau}+v\,\mathrm{d}\hat{\tau}+\underbrace{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\hat{\tau}}_{\text{二阶小量，舍去}}.$$

再代入已求得的 $\mathrm{d}\hat{\tau}=\mathrm{d}\theta\,\hat{n}$ ，即得 $\mathrm{d}\vec{v}=\mathrm{d}v\,\hat{\tau}+v\,\mathrm{d}\theta\,\hat{n}$。

所以这就是乘积法则的微分写法，两项分工与图中一致：$\mathrm{d}\vec{v}_\tau=\mathrm{d}v\,\hat{\tau}$ 来自速率改变（沿切向），$\mathrm{d}\vec{v}_n=v\,\mathrm{d}\theta\,\hat{n}$ 来自方向改变（垂直于切向）。

其中切向部分严格写为

$$\Delta\vec{v}_\tau=\big(v(t+\Delta t)-v(t)\cos\Delta\theta\big)\hat{\tau}(t+\Delta t)=\Delta v\,\hat{\tau}(t)+o(\Delta t).$$

于是

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{v}\,\hat{\tau}+\omega v\,\hat{n},\qquad a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\qquad a_n=\omega^2R=\frac{v^2}{R}.$$

注. 一般地 $\vec{A}=A(t)\hat{A}(t)$ （长度也变），则

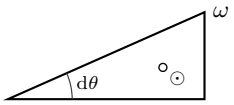
$$\dot{\vec{A}}=\dot{A}\,\hat{A}+\omega_A A(t)\,\hat{n}_A.$$

1.2.4 角量的矢量化

无穷小角位移

$$\mathrm{d}\vec{\theta}=\mathrm{d}\theta\,\hat{k},$$

方向按转动方向的**右手螺旋规则**确定（图中 ⊙ 表示垂直纸面向外）。



$$\mathrm{d}\vec{r}=R\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\tau}=\mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{r}.$$

角速度矢量与角加速度矢量

$$\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}=\omega\,\hat{k},\qquad\vec{\beta}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\beta\,\hat{k},$$

于是

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r},$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=R\beta\,\hat{\tau}-\omega^2\vec{r}.$$

第一个等号是叉乘的乘积法则（对 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 求导）；第二个等号只是代入 $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\vec{\beta}$ 与 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$。真正要算的是后两项。

第一项。 $\vec{\beta}=\beta\hat{k}$ 沿转轴（垂直于运动平面），$\vec{r}=R\hat{r}$ 在平面内，而 $\hat{k}\times\hat{r}=\hat{\tau}$（即把 $\hat{r}$ 沿转动方向转 90°），故

$$\vec{\beta}\times\vec{r}=\beta R(\hat{k}\times\hat{r})=R\beta\hat{\tau}.$$

第二项。用三重矢积公式 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$，取 $\vec{A}=\vec{B}=\vec{\omega}$、$\vec{C}=\vec{r}$：

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{=0}-\vec{r}\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})}_{=\omega^2}=-\omega^2\vec{r}.$$

$\vec{\omega}\cdot\vec{r}=0$ 是因为转轴垂直于运动平面，而 $\vec{r}$ 躺在平面内。

与前面对得上。 $-\omega^2\vec{r}=-\omega^2R\hat{r}=\omega^2R\hat{n}$（因 $\hat{n}=-\hat{r}$），所以 $\vec{a}=R\beta\hat{\tau}+\omega^2R\hat{n}$ ——与前面变速圆周运动用分量法算出的结果完全一致，只是这里全程没有拆分量。

1.2.4.1 一般矢量的时间导数

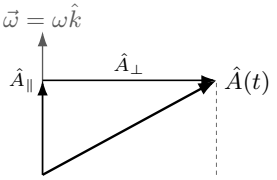
对 $\vec{A}(t)=A(t)\hat{A}(t)$，$\vec{\omega}=\omega\hat{k}$：

$$\dot{\vec{A}}=\underbrace{\dot{A}\,\hat{A}(t)}_{\text{大小变化率}}+\underbrace{\vec{\omega}_A\times\vec{A}}_{\text{方向变化率}}.$$

这个拆分就是乘积法则。既然写成「长度 × 方向」$\vec{A}=A(t)\,\hat{A}(t)$，两个因子都随时间变，求导自然给出两项 $\dot{\vec{A}}=\dot{A}\,\hat{A}+A\,\dot{\hat{A}}$：第一项冻住方向、只让长度变；第二项冻住长度、只让方向转。故称大小变化率与方向变化率。

第二项为何写成叉乘：$\hat{A}$ 模长恒为 1，由前面那条规律 $\dot{\hat{A}}=\vec{\omega}_A\times\hat{A}$，再把标量 A 挪进去，$A(\vec{\omega}_A\times\hat{A})=\vec{\omega}_A\times\vec{A}$。

两项恰好*互相垂直*（第一项沿 $\hat{A}$，第二项由叉乘必垂直于 $\hat{A}$），故不会互相抵消，「长度变了多少」与「方向转了多少」可以分开算——前面把 $\vec{a}$ 拆成 $\vec{a}_\tau$ 与 $\vec{a}_n$，正是取 $\vec{A}=\vec{v}$ 的特例。



把 $\hat{A}$ 分解为平行、垂直于 $\vec{\omega}$ 的两部分，只有垂直部分随转动改变方向：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{A}_\perp}{\mathrm{d}t}=\omega\,|\hat{A}_\perp|\,\hat{n}_\perp=\vec{\omega}\times\hat{A}_\perp=\vec{\omega}\times\hat{A},$$

故

$$A(t)\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}=A(t)\,(\vec{\omega}\times\hat{A}).$$

那条等式链把三维转动化归为平面情形。先沿转轴分解 $\hat{A}=\hat{A}_\parallel+\hat{A}_\perp$，再逐个等号看。

①绕轴转动不改变轴向分量：$\hat{A}$ 与轴的夹角、模长都不变，故 $\hat{A}_\parallel$ 是常矢量、导数为零，全部变化落在 $\hat{A}_\perp$ 上。

② $\hat{A}_\perp$ 躺在垂直于轴的平面内、模长不变而以 ω 转，正是前面那条规律的适用对象：大小 $=\omega|\hat{A}_\perp|$，方向 $\hat{n}_\perp$ 即把 $\hat{A}_\perp$ 转 90°。

③换写成叉乘：因 $\vec{\omega}\perp\hat{A}_\perp$，叉乘模长 $=\omega|\hat{A}_\perp|$、方向由右手法则恰是 $\hat{n}_\perp$，大小与方向都相同故相等。

④ $\hat{A}_\parallel$ 与 $\vec{\omega}$ 平行、叉乘为零，故 $\vec{\omega}\times\hat{A}=\vec{\omega}\times\hat{A}_\perp$，下标可去。

收获是：$\dot{\hat{A}}=\vec{\omega}\times\hat{A}$ 在三维普遍成立，$\hat{A}$ 不必垂直于转轴（此时它扫出一个圆锥面）；平面内的结论只是 $\hat{A}_\parallel=0$ 的特例。

1.2.4.2 有限转动不可交换

记绕轴 $\hat{n}$ 转过 θ 的转动为 $R=R_{\hat{n}}(\theta)$。**转动角位移不满足交换律**：

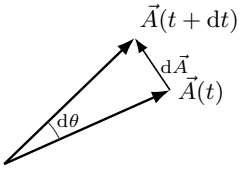
$$R_{\hat{n}}(\theta_1)R_{\hat{m}}(\theta_2)\neq R_{\hat{m}}(\theta_2)R_{\hat{n}}(\theta_1).$$

但**无穷小角位移则有交换律**。将转动展开到一阶，

$$R_{\hat{n}}(\mathrm{d}\theta) = \mathbb{1} + \mathrm{d}\theta\, K_{\hat{n}} + \cdots,$$

$$R_{\hat{n}}(\mathrm{d}\theta_1)R_{\hat{m}}(\mathrm{d}\theta_2) = (\mathbb{1} + \mathrm{d}\theta_1 K_1)(\mathbb{1} + \mathrm{d}\theta_2 K_2) = \mathbb{1} + \mathrm{d}\theta_1 K_1 + \mathrm{d}\theta_2 K_2 = R_{\hat{m}}(\mathrm{d}\theta_2)R_{\hat{n}}(\mathrm{d}\theta_1).$$

在平面内把矢量转过 $\mathrm{d}\theta$：



$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mathrm{d}\theta & -\sin\mathrm{d}\theta \\ \sin\mathrm{d}\theta & \cos\mathrm{d}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x - \mathrm{d}\theta A_y \\ A_y + \mathrm{d}\theta A_x \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{d}\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A} = -\,\mathrm{d}\theta A_y\,\hat{x} + \mathrm{d}\theta A_x\,\hat{y}, \qquad \mathrm{d}\vec{\theta} = \mathrm{d}\theta\,\hat{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{A}.$$

> 最后一步是把 $\mathrm{d}\vec{\theta} = \mathrm{d}\theta\,\hat{k}$ 与 $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$ 直接叉乘，用 $\hat{k}\times\hat{x} = \hat{y}$、$\hat{k}\times\hat{y} = -\hat{x}$：
>
> $$\mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{A} = \mathrm{d}\theta\big(A_x\,\hat{k}\times\hat{x} + A_y\,\hat{k}\times\hat{y}\big) = -\,\mathrm{d}\theta A_y\,\hat{x} + \mathrm{d}\theta A_x\,\hat{y},$$
>
> 与左边由转动矩阵算出的 $\mathrm{d}\vec{A}$ 逐项相同，故二者相等。

注. 若 $\mathrm{d}\vec{A}, \vec{A} \in V$ ，则 $\mathrm{d}\vec{\theta} \notin V$ ——角位移矢量不在原矢量所在的平面内。

1.2.5 运动学积分问题

1.2.5.1 一维匀加速直线运动

$a = \text{const}$ ，初值 (v_0, x_0)：

$$\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v = \int_0^t a\ \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = v_0 + at,$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\ \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

1.2.5.2 求 $v = v(x)$

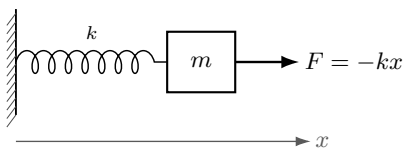
由 $x(t)$、$v(t)$ 消去 t 得 $v(t) = v\big(x(t)\big)$。利用

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x},$$

得

$$\int_{v_0}^{v(x)} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}v^2 = \int_{x_0}^{x} a\ \mathrm{d}x, \qquad \frac{m}{2}\big(v^2 - v_0^2\big) = ma(x - x_0).$$

例 (水平弹簧振子)



$m\ddot{x} = -kx$ ，即

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

用上面的**能量法公式**：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x = a(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}, \qquad -\omega^2 x\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}\omega^2 x^2\big) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}v^2,$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 x^2 = \mathrm{const} = \frac{E}{m} = \tfrac{1}{2}\omega^2 A^2,$$

其中 A 是**振幅**。故

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2, \qquad (m\omega^2 = k).$$

由

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\omega A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}(x/A)}{\sqrt{1 - x^2/A^2}} = \int \pm\omega\ \mathrm{d}t, \qquad \cos^{-1}\frac{x}{A} = \mp\omega t + C,$$

得

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0), \qquad \text{周期} T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

> ± **从哪来。**上一行的守恒式两边乘 2 得 $v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2\big(1 - x^2/A^2\big)$，开平方就带出 ±。物理上：同一个位置 x 质点每周期经过两次，一次向右（$v > 0$）一次向左（$v < 0$），两者速率相同、符号相反。
>
> **为什么写成** $\mathrm{d}(x/A)$**。**把 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 分离变量：
>
> $$\frac{\mathrm{d}x}{A\sqrt{1 - x^2/A^2}} = \pm\omega\ \mathrm{d}t.$$
>
> A 是常量，故 $\mathrm{d}x/A = \mathrm{d}(x/A)$。这样一换，左边就凑成了标准积分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$（其中 $u = x/A$）——目的就是把它变成查表可得的形式。
>
> **为什么 ± 变成了 ∓。**因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$，即 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u + C$。左边积出 $-\arccos(x/A)$，移项时符号翻转，于是 $\cos^{-1}\frac{x}{A} = \mp\omega t + C$。
>
> **最后一步。**两边取余弦：$x = A\cos(\mp\omega t + C)$。而 cos 是偶函数，$\cos(-\omega t + C) = \cos(\omega t - C)$，所以不论取哪个符号都能写成 $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$——± 带来的差别全部被吸收进初位相 ϕ_0 里，并不给出新的解。

$\phi(t) = \omega t + \phi_0$ 为**位相**，ϕ_0 为**初位相**。

通解亦可写成

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\big(\cos\phi_0\cos\omega t - \sin\phi_0\sin\omega t\big) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

其中 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$，$\tan\phi_0 = -\frac{A_2}{A_1}$。

初值问题：已知 v_0, x_0。由 $x(0) = x_0$ 得 $A_1 = x_0$；由

$$v(t) = -\omega A_1\sin\omega t + \omega A_2\cos\omega t, \qquad \omega A_2 = v_0 \Rightarrow A_2 = \frac{v_0}{\omega},$$

得

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

注. 更一般地 $\ddot{x} = a(x, \dot{x}) = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)}{\mathrm{d}x}$；当右端可分离变量为 $f_1(x)f_2(\dot{x})$ 时，方程可直接积分。

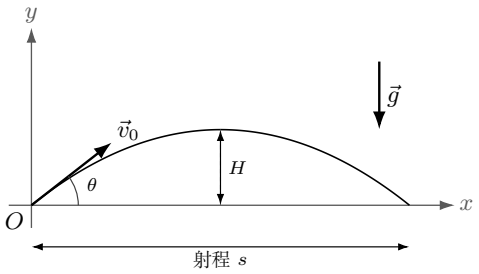
1.3 平面曲线运动

1.3.1 直角坐标分解

$$\vec{r} = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y}, \qquad \vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}, \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y}.$$

可分解为两个独立方向的直线运动。

1.3.1.1 分量式



例 (斜抛运动)

初条件与加速度

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

即**水平方向匀速直线运动+竖直方向上抛**:

$$x(t) = v_0\cos\theta\, t, \qquad y(t) = v_0\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 t 为参量，消去 t （ $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$ ）得轨道方程

$$y(x) = \tan\theta\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2.$$

到最高点的时刻与**射高**

$$t_0 = \frac{v_0\sin\theta}{g}, \qquad H = \tfrac{1}{2}gt_0^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}.$$

射程

$$s = v_0\cos\theta\cdot\frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g},$$

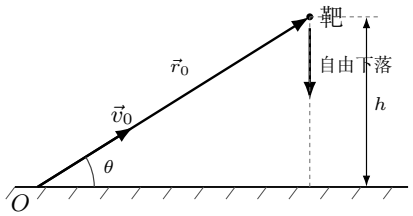
当 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 时取射程极大值 $s_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}$。

1.3.1.2 整体式

$\vec{g}$、$\vec{v}_0$ 为常矢量时，直接对矢量积分:

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{g}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)}\mathrm{d}\vec{v} = \int_0^t \vec{g}\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\,\mathrm{d}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2.$$



例 (空中打靶)

子弹与靶（靶同时开始自由下落）的位矢

$$\begin{cases} \vec{r}_{\text{弹}}(t) = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2, \\ \vec{r}_{\text{靶}}(t) = \vec{r}_0 + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2. \end{cases}$$

击中条件 $\vec{r}_{\text{靶}}(t) = \vec{r}_{\text{弹}}(t)$ 给出

$$\vec{v}_0 t = \vec{r}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_0 \parallel \vec{r}_0,$$

即**初速度方向必须直接对准靶的初始位置**（两条抛物线的重力项相同，自动抵消）。

还须在靶落地前击中。由 $t=\dfrac{r_0}{v_0}<\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ 与 $h=r_0\sin\theta$ ，得

$$v_0>\sqrt{\frac{gr_0}{2\sin\theta}}.$$

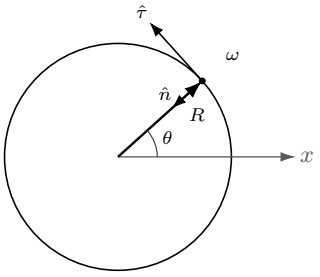
注. **换参考系**：取随靶一起下落的**自由落体参考系** S' ，则

$$\vec{r}'_{\text{靶}}\equiv\vec{r}_0,\qquad \vec{r}'_{\text{弹}}=\vec{v}_0t,$$

靶静止不动，子弹作匀速直线运动，击中条件 $\vec{v}_0\parallel\vec{r}_0$ 一眼可见。

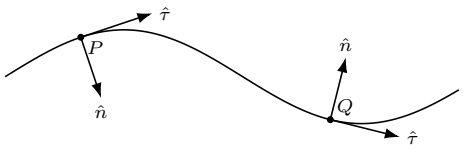
1.3.2 自然坐标分解（切向—法向）

1.3.2.1 圆周情形



$$\vec{v}=v\,\hat{\tau},\qquad v=\omega R,\qquad \vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n,\qquad \begin{cases}\vec{a}_\tau=\dot{v}\,\hat{\tau},\\ \vec{a}_n=\dfrac{v^2}{R}\,\hat{n},\end{cases}\qquad \dot{\hat{\tau}}=\omega\,\hat{n}=\frac{v}{R}\,\hat{n}.$$

1.3.2.2 一般曲线



$$\vec{v}=v\,\hat{\tau}\quad(\text{约定}v>0),\qquad \vec{a}=\dot{v}\,\hat{\tau}+v\,\dot{\hat{\tau}},\qquad \dot{\hat{\tau}}=\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}\,\hat{n}.$$

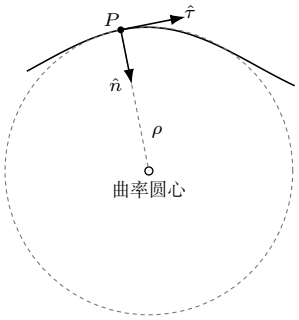
第一式仍是乘积法则：$\vec{v}=v\,\hat{\tau}$ 里 $v(t)$ 与 $\hat{\tau}(t)$ 都随时间变，故 $\vec{a}=\dot{v}\,\hat{\tau}+v\,\dot{\hat{\tau}}$ ——快慢在变、方向在变，各得一项。

第二式则是那条通用规律：$\hat{\tau}$ 模长恒为 1 ，所以 $\dot{\hat{\tau}}$ 垂直于 $\hat{\tau}$、大小 = 模长 × 转动速率 $=1\times\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}$ ，方向即把 $\hat{\tau}$ 朝凹侧转 90° ，正是 $\hat{n}$。

与圆周的唯一差别在那个转动速率。圆周上切线与半径同步转，可直接用 ω ；一般曲线没有半径、也没有统一的 ω ，能用的只有切线*自身*的倾角 θ_τ 的变化率 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}$。这也是这里写 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}$ 而不写 ω 的原因。

而 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}$ 此刻还是个未知量。下一小节引入密切圆，把它换成 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}=v/\rho$ ，才最终得到 $a_n=v^2/\rho$。

1.3.2.3 找密切圆



以无穷小圆弧段逼近 P 点附近的无穷小曲线段，该圆弧所在的圆称为**密切圆**（**曲率圆**），其半径为**曲率半径** ρ，由 P 指向曲率圆心的方向即（内）法向 $\hat{n}$。曲率 $\sim$ 弯曲程度：

$$\mathrm{d}l = v\ \mathrm{d}t = \rho\cdot\mathrm{d}\theta_\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho},$$

故

$$a_\tau = \dot{v}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

> 这一步只是把上一小节留下的未知量 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}$ 代掉。$\mathrm{d}l = v\,\mathrm{d}t = \rho\,\mathrm{d}\theta_\tau$ 这个连等把同一段无穷小弧长算了两遍：
>
> 左边从运动看——走过的弧长 = 速率 × 时间；
>
> 右边从几何看——这段弧属于半径 ρ 的密切圆，弧长 = 半径 × 圆心角。而圆的切线与半径垂直，半径转过 $\mathrm{d}\theta$ 时切线也转过同样的角，所以这里的圆心角就是切线转角 $\mathrm{d}\theta_\tau$。
>
> 两边相等即 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t} = v/\rho$。代回上一小节的 $\vec{a} = \dot{v}\,\hat{\tau} + v\,\dot{\hat{\tau}}$ 与 $\dot{\hat{\tau}} = \frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t}\hat{n}$：
>
> $$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{\tau} + v\cdot\frac{v}{\rho}\,\hat{n} = \dot{v}\,\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n},$$
>
> 即 $a_\tau = \dot{v}$、$a_n = v^2/\rho$。切向那一项本来就已是 $\dot{v}$，没有变化；v^2 里的两个 v 来源不同：一个来自乘积法则的因子 v，另一个来自 $\frac{\mathrm{d}\theta_\tau}{\mathrm{d}t} = v/\rho$。
>
> 对圆周 $\rho = R$ 为常量，退回 $a_n = v^2/R = \omega^2 R$，与前面一致。

1.3.2.4 曲率半径的解析表达式

对 $y = y(x)$：

$$\rho = \frac{\left(1 + y_x'^2\right)^{3/2}}{|y_x''|}.$$

证明. 由 $\rho = \dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta_\tau}$。弧长

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y_x'^2}\,|\mathrm{d}x|;$$

切线倾角满足 $\tan\theta_\tau = y_x'$，两边对 x 求导得 $\dfrac{1}{\cos^2\theta_\tau}\,\mathrm{d}\theta_\tau = y_x''\,\mathrm{d}x$，即

$$|\mathrm{d}\theta_\tau| = \frac{|y_x''|}{1 + y_x'^2}\ \mathrm{d}x.$$

两式相除即得 $\rho = \dfrac{(1 + y_x'^2)^{3/2}}{|y_x''|}$，相应曲率

$$k = \rho^{-1} = \frac{|y_x''|}{\left(1 + y_x'^2\right)^{3/2}}.$$

■

1.3.2.5 两项应用

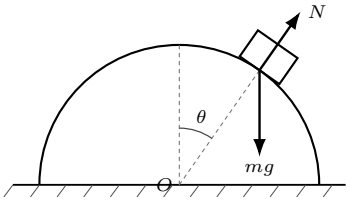
1）切向方程给出功能关系。由 $a_\tau=\dot v$ ，

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\qquad \vec F\cdot\mathrm{d}\vec l=F_\tau\ \mathrm{d}l=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(\tfrac12 mv^2\right),$$

即

$$\vec F\cdot\mathrm{d}\vec l=\mathrm{d}E_k.$$

2）法向方程给出脱离条件。



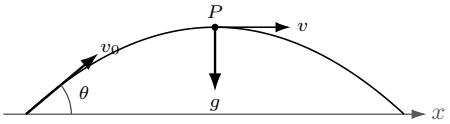
$$\tfrac12 mv^2=mgR(1-\cos\theta),\qquad m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-N,\qquad \text{临界：}N=0.$$

（$N>0$ 时不脱离。）由 $mv^2=2mgR(1-\cos\theta)$ 与 $N=0$ 时 $mv^2=mgR\cos\theta_0$ 得

$$2(1-\cos\theta_0)=\cos\theta_0\qquad\Longrightarrow\qquad\cos\theta_0=\frac23.$$

$\theta>\theta_0$ 时 v 继续增大，$N(\theta)<0$ ，故**脱离**。

1.3.2.6 抛体轨道的曲率半径



在顶点 P 处速度水平、加速度竖直，故 $a_n=g$、$v=v_0\cos\theta$ ：

$$a_n=\frac{v^2}{\rho},\qquad \rho=\frac{v^2}{a_n},\qquad \rho_P=\frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}.$$

v 愈大、a_n 愈小，则 ρ 愈大——与定半径的圆周相比，抛体轨道必然「张开」，故沿圆周轨道运动者一定脱离。

1.3.2.7 运动学方法求曲率半径

$\rho=v^2/a_n$ 是纯运动学关系；而曲率半径是曲线内禀的几何性质，与曲线上的运动无关。于是可以在曲线上任取一种方便的运动来求 ρ。对 $y=y(x)$ ，设 $x=v\cdot t$ ：

$$y=y(vt)\implies\begin{cases}v_x=\dot x\\ v_y=\dot y\end{cases}\implies\begin{cases}v^2\\ \hat\tau\Rightarrow\hat n\\ a_x\\ a_y\end{cases}\implies a_n\implies\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\left(1+y_x'^2\right)^{3/2}}{|y_x''|}.$$

> 上面那串箭头只是配方，代数还没做。整段的关键在第一句：ρ 是曲线自身的几何性质，与谁在上面怎么跑无关，所以我们有权任意编一种运动，用 $\rho=v^2/a_n$ 算出来——越省事越好。
>
> **编** $x=v_0t$ （水平匀速，v_0 为常量），好处是 $\ddot x=0$、加速度只剩竖直分量。由链式法则
>
> $$\dot x=v_0,\ \ddot x=0;\qquad \dot y=v_0y',\qquad \ddot y=v_0y''\dot x=v_0^2y'',$$

$$v^2 = v_0^2\big(1+y'^2\big), \qquad \vec{a} = \big(0,\ v_0^2 y''\big).$$

取法向投影（要的是投影，不是 $|\vec{a}|$）。切向 $\hat{\tau} = \frac{(1,y')}{\sqrt{1+y'^2}}$ 转 90° 得 $\hat{n} = \frac{(-y',1)}{\sqrt{1+y'^2}}$，故

$$a_n = \big|\vec{a}\cdot\hat{n}\big| = \frac{v_0^2|y''|}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\big(1+y'^2\big)^{3/2}}{|y''|}.$$

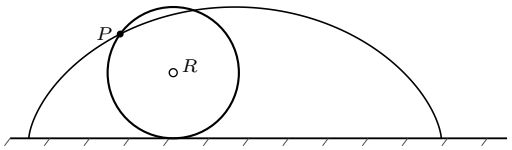
v_0 约掉了——这正验证了「结果与所编的运动无关」，也说明这条路合法；所得与 §1.3.2.4 的纯几何算法完全相同。

对一般曲线轨道上的物块，两个方程为

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\,\Delta h(\theta), \qquad m\frac{v^2}{\rho(\theta)} = -N + mg\,K(\theta).$$

这两式是把前面几节拼起来解题的套路：第一式（机械能）给出每个位置的速率 $v(\theta)$；第二式是法向的牛顿方程——支持力与重力的法向分量之合提供向心力 mv^2/ρ，其中 $\rho(\theta)$ 由上面的运动学方法算出。两式联立即可求 $N(\theta)$，令 $N=0$ 便得脱离点。半球那一例就是 $\rho = R$、$K(\theta)=\cos\theta$ 的特例。

1.3.2.8 滚轮线



$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - R\sin\theta, \\ y(\theta) = R - R\cos\theta, \end{cases} \qquad \theta \in [0,\infty).$$

设 $\theta = \omega t$，按上述运动学方法可得

$$\rho(\theta) = 4R\sin\frac{\theta}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}.$$

先算 ρ。取 $\theta=\omega t$（ω 为常量），对参数方程逐次求导：

$$\dot{x} = R\omega(1-\cos\theta), \quad \dot{y} = R\omega\sin\theta; \qquad \ddot{x} = R\omega^2\sin\theta, \quad \ddot{y} = R\omega^2\cos\theta.$$

速率平方用半角公式 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ 化简：

$$v^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2 = 2R^2\omega^2(1-\cos\theta) = 4R^2\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \text{即} \quad v = 2R\omega\sin\frac{\theta}{2}.$$

切向单位矢量因此格外干净：

$$\hat{\tau} = \frac{(\dot{x},\dot{y})}{v} = \frac{\big(2\sin^2\frac{\theta}{2},\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\big)}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \Big(\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\Big), \qquad \hat{n} = \Big(\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}\Big)$$

（$\hat{n}$ 取指向凹侧，即向下）。取 $\vec{a}$ 的法向投影，用差角公式：

$$a_n = \vec{a}\cdot\hat{n} = R\omega^2\Big(\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\Big) = R\omega^2\sin\frac{\theta}{2}.$$

于是

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4R^2\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{R\omega^2\sin\frac{\theta}{2}} = 4R\sin\frac{\theta}{2},$$

ω 照例约掉。顺带一提：$|\vec{a}| = R\omega^2$ 是常量，且 $\vec{a}$ 恒指向滚动圆的圆心——因为 P 相对那个（匀速平移的）圆心正作匀速圆周运动。

再看 θ_0。笔记未写出它的定义式。按前几节的套路反推，它应是*物块自拱顶静止下滑、到何处脱离*的解：拱顶在 $\theta=\pi$（$y=2R$），能量式给

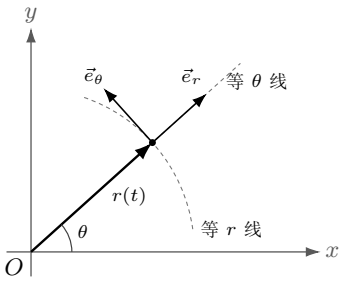
$$v^2 = 2g\big(2R-y\big) = 2gR(1+\cos\theta) = 4gR\cos^2\frac{\theta}{2},$$

重力沿内法向的分量为 $(0,-g)\cdot\hat{n}=g\sin\frac{\theta}{2}$，故法向方程为 $\dfrac{v^2}{\rho}=g\sin\frac{\theta}{2}-\dfrac{N}{m}$。令 $N=0$：

$$\frac{4gR\cos^2\frac{\theta}{2}}{4R\sin\frac{\theta}{2}}=g\sin\frac{\theta}{2}\implies\cos^2\frac{\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}\implies\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4},$$

即 $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$；由拱形对于 $\theta=\pi$ 的对称性，另一侧为 $2\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$。两个值恰与笔记相符。

1.3.3 极坐标分解



$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}$$

等 r 线为圆周，其法向为 $\vec{e}_r$；等 θ 线为射线，其法向为 $\vec{e}_\theta$。

定义 径向单位矢量 $\vec{e}_r=\cos\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y}$； **角向单位矢量（横向单位矢量）** $\vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y}$。

位矢 $\vec{r}=r(t)\,\vec{e}_r(t)$，基矢微分

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{e}_r=\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta,\\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r,\end{cases}\qquad \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\vec{e}_r+r\,\mathrm{d}\vec{e}_r=\mathrm{d}r\,\vec{e}_r+r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta.$$

速度分解

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=\vec{v}_r+\vec{v}_\theta.$$

加速度分解

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)=\ddot{r}\,\vec{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta-r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r\\&=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta=\vec{a}_r+\vec{a}_\theta.\end{aligned}$$

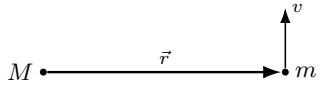
例 (圆周运动) $r=R$，故 $\dot{r}=0$、$\ddot{r}=0$；又 $\dot{\theta}=\omega$、$\ddot{\theta}=\beta$：

$$\vec{v}=r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=R\omega\,\hat{\tau},$$

$$\vec{a}_r=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r=-R\omega^2\,\vec{e}_r=\omega^2R\,\hat{n}\quad\text{(向心加速度)},$$

$$\vec{a}_\theta=\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta=R\beta\,\hat{\tau}\quad\text{(切向加速度)}.$$

1.3.3.1 有心力场



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r}, \qquad M \gg m.$$

一般地 $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{r}$ ，其中

$$\begin{cases} F(r) > 0\text{：斥力场}, \\ F(r) < 0\text{：引力场}. \end{cases}$$

由极坐标下的加速度分解，径向与角向方程分别为

$$F(r) = ma_r = m\big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\big), \qquad 0 = ma_\theta = m\big(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\big).$$

角向方程两边同乘 r ：

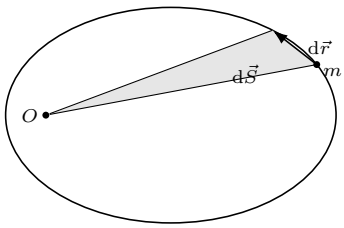
$$0 \cdot r = m\big(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(mr^2\dot{\theta}\big),$$

于是得**守恒量**

$$L = mr^2\dot{\theta}, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = mrv_\theta\,\hat{k}.$$

> **这是对力心 O 的角动量。**来路在上面两步：有心力没有角向分量，故 $a_\theta = 0$ ；而 $r\,a_\theta$ 恰是全微商 $\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(mr^2\dot{\theta}\big)$ ，于是 $mr^2\dot{\theta}$ 不变。用力矩说：有心力沿 $\vec{r}$ ，对 O 的力矩为零。「对 O」不可省——换个参考点就不守恒。
>
> **后一式为何对：叉乘把径向速度整个滤掉了。**代入 $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$、$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ ：
>
> $$\vec{r} \times \dot{r}\,\vec{e}_r = 0, \qquad \vec{r} \times r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = r\,v_\theta\,\hat{k}$$
>
> （前者因两矢量平行，后者用 $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \hat{k}$ ）。物理上：径向速度是直朝 O 去或离开，不带来绕 O 的转动。
>
> **标量并没有「变成」矢量——是两件独立的事对上了。**左边的 $L = mr^2\dot{\theta}$ 是从角向方程里*掉出来*的一个组合，当时只知道它不随时间变，既无方向也不知它是什么。右边的 $\vec{L} \equiv \vec{r} \times m\vec{v}$ 是角动量的独立定义；把它在极坐标下算开得 $\vec{L} = mrv_\theta\,\hat{k}$ ，而其大小 $mr \cdot r\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$ 恰好等于左边那个数。所以那个等号不是「把标量升成矢量」——标量不可能凭空生出方向；真实逻辑是矢量本有定义，算完发现其大小就是那个标量，于是给守恒量安上了物理身份。

1.3.3.2 开普勒第二定律



$$\mathrm{d}\vec{S} = \tfrac{1}{2}\,\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}, \qquad \vec{K} = \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\,\vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m}.$$

$\vec{L}$ 守恒即面积速度 $\vec{K}$ 守恒。

1.3.3.3 轨道问题

求 $r = r(\theta)$ 有两条路：

1. 已知运动方程 $r(t)$、$\theta(t)$ ，消去 t 即得 $r = r(\theta)$。
2. 已知速度分量对位置的依赖关系：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = f(r,\theta) = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{v_r \cdot r}{v_\theta} = \frac{v_r(r) \cdot r}{v_\theta(r)},$$

其中 v_r, v_θ 由两个守恒量给出：

$$L = mrv_\theta \implies v_\theta = \frac{L}{mr}, \qquad E = \tfrac{1}{2}m\big(v_r^2 + v_\theta^2\big) + V(r) \implies v_r = v_r(r).$$

$V(r)$ **是有心力的势能。**有心力 $\vec{F}=F(r)\hat{r}$ 只依赖 r 且沿径向，是保守力，故存在 $V(r)$ 使 $F(r)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$；如万有引力 $F=-\frac{GMm}{r^2}$ 对应 $V=-\frac{GMm}{r}$。E 是总机械能。所以这里一共用了两个守恒量：L 与 E，都由初条件定。

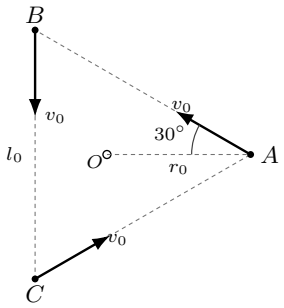
为何得出 $v_r=v_r(r)$**。**把 $v_\theta=\frac{L}{mr}$ 代入能量式：

$$E=\tfrac{1}{2}mv_r^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\implies v_r=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\Big[E-V(r)-\frac{L^2}{2mr^2}\Big]},$$

右端除 r 外只剩常量 E,L,m，故 v_r 只是 r 的函数（$\pm$ 对应向外与向内两支）。

为何非这么做。目标是把 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r\,v_r}{v_\theta}$ 化成只含 r 的式子，才能分离变量积出 $r=r(\theta)$；若 v_r,v_θ 里还含 t 或 θ 就走不通——两个守恒量的作用正是把时间消掉。（$\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)$ 常记作有效势能 V_{eff}，径向运动便化为一维问题。）

例（三点追击）三质点位于边长 l_0 的等边三角形顶点，各以速率 v_0 始终朝向下一个。



A 的速度方向与径向的夹角固定为 30°，故

$$v_r=v_0\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=\dot{r},\qquad v_\theta=v_0\cdot\frac{1}{2}=r\dot{\theta}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{v_r\cdot r}{v_\theta}=-\sqrt{3}\,r,\qquad \frac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\,\mathrm{d}\theta\implies\ln\frac{r}{r_0}=-\sqrt{3}\,\theta,$$

$$r=r_0e^{-\sqrt{3}\,\theta},\qquad r_0=\frac{\sqrt{3}}{3}l_0.$$

这是**对数螺线** $r=r_0e^{a\theta}$ 的一个特例。相遇所需时间

$$\Delta t=\frac{r_0}{|\dot{r}|}=\frac{2}{3}\cdot\frac{l_0}{v_0}.$$

关键是对称性。三点处境完全对称（120° 旋转对称），运动中不被破坏，故三角形始终等边，只是边长在缩、整体在转。由此：中心 O 始终不动（可取作极点）；三点到 O 等距；**每点处的几何形状不变，故速度与径向的夹角是常数**。最后这条才是能解的原因——若三角形变形，夹角随时间变，积分就做不成。

那个 30°**。**等边三角形顶角 60°，而 A 连到中心 O 的线正是它的角平分线，故 $\angle BAO=30^\circ$。速度沿 $A\to B$，与*朝外的* $\vec{e}_r$ 成 150°：

$$v_r=v_0\cos150^\circ=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}v_0,\qquad v_\theta=v_0\sin150^\circ=\tfrac{1}{2}v_0.$$

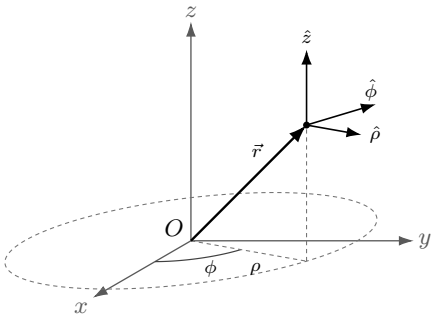
代入上一小节的 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r\,v_r}{v_\theta}$ 得 $-\sqrt{3}\,r$ ——v_0 约掉了，说明轨道*形状*与追击的快慢无关；分离变量积分即得 $r=r_0e^{-\sqrt{3}\theta}$。r_0 是外接圆半径：三顶点相距 120°，弦长 $l_0=2r_0\sin60^\circ=\sqrt{3}\,r_0$。

Δt **能一步写出**，是因为 $\dot{r}=v_r$ 是常量，r 随时间线性减小。注意 $r\to0$ 要求 $\theta\to\infty$：三点绕中心转了无穷多圈才相遇，而时间与路程都有限——对数螺线正是这样一条「无限缠绕而长度有限」的曲线。

1.4 柱坐标与球坐标分解

三维空间曲线运动除按直角坐标分解外，也可选用其他正交曲线坐标系，最常用的两种是柱坐标系与球坐标系。

1.4.1 柱坐标



xy 平面上的极坐标系与 z 轴一起构成柱坐标系。位矢

$$\vec{r}=\vec{\rho}+\vec{z}=\rho\,\hat{\rho}+z\,\hat{z},\qquad \begin{cases} x=\rho\cos\phi,\\ y=\rho\sin\phi,\\ z=z. \end{cases}$$

等 ρ 面为柱面。线元与运动学量：

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\rho\,\hat{\rho}+\rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}+\mathrm{d}z\,\hat{z},$$

$$\vec{v}=\dot{\rho}\,\hat{\rho}+\rho\dot{\phi}\,\hat{\phi}+\dot{z}\,\hat{z},$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\phi}+\rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi}+\ddot{z}\,\hat{z}.$$

柱坐标就是「平面极坐标 + 一根独立的 z」：前两项与 §1.3.3 逐字对应（$r\to\rho$、$\theta\to\phi$），第三项因 $\hat{z}$ 是常矢量而最平凡。

基矢的微分。 $\hat{\rho}=\cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}$、$\hat{\phi}=-\sin\phi\,\hat{x}+\cos\phi\,\hat{y}$ 只含 ϕ，对 ϕ 求导得

$$\mathrm{d}\hat{\rho}=\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi},\qquad \mathrm{d}\hat{\phi}=-\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\rho},\qquad \mathrm{d}\hat{z}=0.$$

两基矢一起转 $\mathrm{d}\phi$、模长不变，故增量垂直于自身、大小为 $\mathrm{d}\phi$。

线元与速度。 $\vec{r}=\rho\,\hat{\rho}+z\,\hat{z}$ 里根本没有 ϕ，ϕ 全靠基矢进来，故乘积法则要动两个因子：$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\rho\,\hat{\rho}+\rho\,\mathrm{d}\hat{\rho}+\mathrm{d}z\,\hat{z}$，中间一项即 $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\phi}$。除以 $\mathrm{d}t$ 便是速度；角向是 $\rho\dot{\phi}$ 而非 $\dot{\phi}$ ——角速度乘上力臂 ρ 才是线速度。

加速度。 逐项求导，三项里两项的基矢会变：

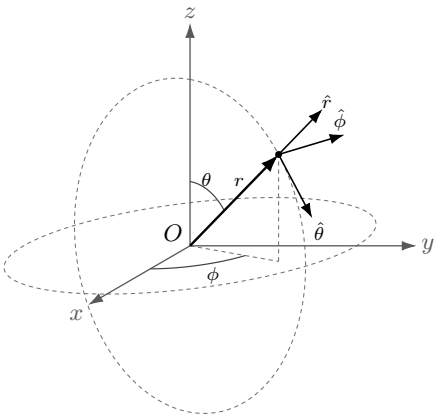
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\,\hat{\rho})=\ddot{\rho}\,\hat{\rho}+\dot{\rho}\dot{\phi}\,\hat{\phi},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\dot{\phi}\,\hat{\phi})=(\dot{\rho}\dot{\phi}+\rho\ddot{\phi})\hat{\phi}-\rho\dot{\phi}^2\,\hat{\rho},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{z}\,\hat{z})=\ddot{z}\,\hat{z}.$$

按基矢归并即得。那个 2 由两处各贡献一份 $\dot{\rho}\dot{\phi}$：一份来自 $\hat{\rho}$ 的转动，一份来自力臂 ρ 的变化，同号相加，此即**科里奥利项**。$-\rho\dot{\phi}^2=-v_\phi^2/\rho$ 是向心项（§1.3.2 的 v^2/ρ），$\rho\ddot{\phi}=\rho\beta$ 来自角加速度。

1.4.2 球坐标



取 z 轴为极轴。在半径 r 固定的球面上用两个球面角描述位置：**余纬度** $\theta\in[0,\pi]$（经线圆上的角位置）与**经度** $\phi\in[0,2\pi)$（纬线圆上的角位置），三个基矢 $\hat r,\hat\theta,\hat\phi$ 互相正交。由 $\rho=r\sin\theta$，

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta,$$

$$\begin{cases}\hat r=\sin\theta\cos\phi\,\hat x+\sin\theta\sin\phi\,\hat y+\cos\theta\,\hat z,\\ \hat\theta=\cos\theta\cos\phi\,\hat x+\cos\theta\sin\phi\,\hat y-\sin\theta\,\hat z,\\ \hat\phi=-\sin\phi\,\hat x+\cos\phi\,\hat y.\end{cases}$$

位矢 $\vec r=r\,\hat r$，线元

$$\mathrm{d}\vec r=\mathrm{d}r\,\hat r+r\,\mathrm{d}\hat r=\mathrm{d}r\,\hat r+r\,\mathrm{d}\theta\,\hat\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat\phi.$$

两个角的约定。 θ 自 z 轴量起，故称「余纬度」：0 北极、$\pi/2$ 赤道、π 南极。$\rho=r\sin\theta$ 是点到 z *轴*的距离（不是到原点），代进 §1.4.1 的 $x=\rho\cos\phi$、$y=\rho\sin\phi$ 即得前两式。

基矢怎么来。只让一个坐标增加，点移动的方向就是该基矢：把 x,y,z 对它求偏导，再除以模长。

$$\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}=r\,(\cos\theta\cos\phi\,\hat x+\cos\theta\sin\phi\,\hat y-\sin\theta\,\hat z),\quad \text{模长 } r,$$
$$\frac{\partial\vec r}{\partial\phi}=r\sin\theta\,(-\sin\phi\,\hat x+\cos\phi\,\hat y),\qquad\qquad \text{模长 } r\sin\theta.$$

除掉模长即得 $\hat\theta$、$\hat\phi$（$\partial\vec r/\partial r$ 模长为 1，即 $\hat r$）。检验：$\hat\phi$ 沿纬线圆切向、是水平的，故无 $\hat z$ 分量；$\hat\theta$ 就是把 $\hat r$ 中的 θ 换成 $\theta+\frac{\pi}{2}$。

线元第二个等号。由上式除以 r 得 $\partial\hat r/\partial\theta=\hat\theta$、$\partial\hat r/\partial\phi=\sin\theta\,\hat\phi$，代入 $\mathrm{d}\hat r=(\partial\hat r/\partial\theta)\,\mathrm{d}\theta+(\partial\hat r/\partial\phi)\,\mathrm{d}\phi$ 再乘 r 即得。

这三个模长就是线元的系数，把坐标增量换算成实际弧长：$\mathrm{d}\theta$ 走的是半径 r 的经线弧，$\mathrm{d}\phi$ 走的是纬线弧——纬线圆半径是 $\rho=r\sin\theta$ 而非 r，越近极点 $\sin\theta\to0$，这一项随之退化。§1.4.3 的 $\frac{1}{r}$、$\frac{1}{r\sin\theta}$ 正是它们的倒数。

球坐标方向矢量的微分

$$\begin{cases}\mathrm{d}\hat r=\mathrm{d}\theta\,\hat\theta+\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat\phi,\\ \mathrm{d}\hat\theta=-\,\mathrm{d}\theta\,\hat r+\cos\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat\phi,\\ \mathrm{d}\hat\phi=-\,\mathrm{d}\phi\cdot\hat\rho=-\,\mathrm{d}\phi\big(\sin\theta\,\hat r+\cos\theta\,\hat\theta\big).\end{cases}$$

求法同上条批注：把基矢的分量式分别对 θ、ϕ 求偏导，再认出结果是哪个基矢。第一式上条已得，另两式：

$$\frac{\partial\hat\theta}{\partial\theta}=-\sin\theta\cos\phi\,\hat x-\sin\theta\sin\phi\,\hat y-\cos\theta\,\hat z=-\hat r,$$
$$\frac{\partial\hat\theta}{\partial\phi}=\cos\theta\,(-\sin\phi\,\hat x+\cos\phi\,\hat y)=\cos\theta\,\hat\phi,$$
$$\frac{\partial\hat\phi}{\partial\theta}=0,\qquad\frac{\partial\hat\phi}{\partial\phi}=-(\cos\phi\,\hat x+\sin\phi\,\hat y)=-\hat\rho.$$

故 $\mathrm{d}\hat\theta = -\mathrm{d}\theta\,\hat r + \cos\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat\phi$，$\mathrm{d}\hat\phi = -\mathrm{d}\phi\,\hat\rho$。$\hat\rho$ 是水平向外的单位矢量，它与 $\hat r$、$\hat\theta$ 的点积分别为 $\sin\theta$、$\cos\theta$，故 $\hat\rho = \sin\theta\,\hat r + \cos\theta\,\hat\theta$，即第三式最右端。

速度分解

$$\vec v = \frac{\mathrm{d}\vec r}{\mathrm{d}t} = \dot r\,\hat r + r\dot\theta\,\hat\theta + r\sin\theta\,\dot\phi\,\hat\phi.$$

就是把线元整个除以 $\mathrm{d}t$，无需新东西。三项分别是：沿半径的伸缩 $\dot r$；沿经线的线速度 $r\dot\theta$（力臂是 r）；沿纬线的线速度 $r\sin\theta\,\dot\phi$——力臂是纬线圆半径 $\rho = r\sin\theta$，不是 r，这是最容易写错的一处。故 $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\phi^2$。

1.4.3 梯度在曲线坐标中的分量

设 $V = V(r,\theta,\phi)$，由 $\mathrm{d}V = \vec\nabla V\cdot\mathrm{d}\vec r$，将两边按同一组基矢展开：

$$\partial_r V\;\mathrm{d}r + \partial_\theta V\;\mathrm{d}\theta + \partial_\phi V\;\mathrm{d}\phi = (\vec\nabla V)_r\;\mathrm{d}r + (\vec\nabla V)_\theta\,r\,\mathrm{d}\theta + (\vec\nabla V)_\phi\,r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi.$$

逐项比较即得

$$\vec\nabla V = \partial_r V\,\hat r + \frac{1}{r}\,\partial_\theta V\,\hat\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\phi V\,\hat\phi.$$

类似地，柱坐标中

$$\vec\nabla V = \partial_\rho V\,\hat\rho + \frac{1}{\rho}\,\partial_\phi V\,\hat\phi + \partial_z V\,\hat z.$$

V **是什么。**数学上是任意**标量场**，推导与它的物理身份无关；本课里它就是**势能**——§1.3.3.3 能量守恒 $E = \frac12 m(v_r^2 + v_\theta^2) + V(r)$ 里的那个 V（刘川书记 V，舒幼生书记 E_p）。保守力与它的关系是 $\vec F = -\vec\nabla V$，故本节给的就是「已知势能场、求力」在球 / 柱坐标下的算法。沿等势面走 $\mathrm{d}V = 0$，故 $\vec\nabla V$ 垂直于等势面、指向 V 增长最快的方向。

球对称势 $\Longrightarrow$ 有心力。若 $V = V(r)$，则 $\partial_\theta V = \partial_\phi V = 0$，后两项自动消失：

$$\vec F = -\vec\nabla V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\hat r,$$

力自动沿径向——这正是 §1.3.3.1「有心力场」那个前提的来源。代入 $V = -GMm/r$ 即得 $\vec F = -\frac{GMm}{r^2}\hat r$。

推导的出发点是梯度的定义。 $\mathrm{d}V = \vec\nabla V\cdot\mathrm{d}\vec r$ 中不含坐标系，故可拿到任何坐标系里解分量：左边链式法则，右边两矢量同基展开、正交归一杀掉交叉项，再因 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ 独立而逐项比较。那两个分母的来历：$\partial_\theta V$ 是「每单位角度的变化」，梯度须是「每单位长度的变化」，而转过 $\mathrm{d}\theta$ 走的弧长是 $r\,\mathrm{d}\theta$。一般地若 $\mathrm{d}\vec r = \sum_i h_i\,\mathrm{d}q_i\,\hat e_i$，则

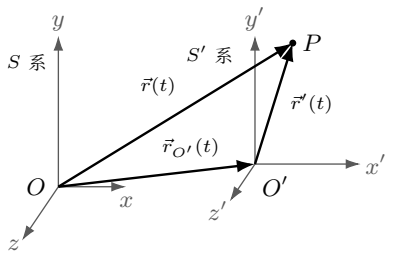
$$\vec\nabla V = \sum_i \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial V}{\partial q_i}\,\hat e_i,$$

球坐标 $h = (1, r, r\sin\theta)$、柱坐标 $(1,\rho,1)$——柱坐标那行不必重推。

1.5 相对运动

1.5.1 参考系相对平动

质点运动描述的**牵连效应**。在相对平动的两参考系 S 与 S' 中建立坐标轴相互平行的直角坐标系 O-xyz 与 O'-$x'y'z'$。



同一个**事件** P 在两系中由两组时空坐标描述：

$$P:\begin{cases} x,\ y,\ z;\ t \\ x',\ y',\ z';\ t' \end{cases}$$

经典力学中时间是**绝对**的：$t=t'$。位置矢量满足

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{r}_{O'}(t),$$

对 t 逐次求导即得速度关系与加速度关系

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}'+\vec{v}_{O'},\qquad \vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_{O'}(t).$$

相应的附加速度与附加加速度称为**牵连速度**与**牵连加速度**：

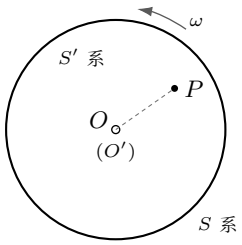
$$\vec{v}_{\text{牵}}=\vec{v}_{O'}=\vec{v}_{S'\text{对}S},\qquad \vec{a}_{\text{牵}}=\vec{a}_{O'}=\vec{a}_{S'\text{对}S}.$$

二者只由两参考系的相对平动决定，与质点的位置和运动无关，即具有**全局性**。

> 这三条关系其实是*同一个式子求导两次*。平动情形下 $\hat{x}',\hat{y}',\hat{z}'$ 不随时间转动，$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 可以径直穿过基矢作用到分量上，所以位置关系一求导就是速度关系、再求导就是加速度关系，中间不产生任何额外项——这是平动这一节如此短的原因。§1.5.2 的转动情形就不能这么跳：基矢本身随时间变，每求一次导都要多冒出一个 $\vec{\omega}\times$，于是速度多出 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$，加速度再多出科氏项与向心项。

1.5.2 参考系相对转动

S 系为不参与转动的**背景参考系**；S' 系相对 S 系作**定轴转动**，即随转动体（图中的圆盘）一起转的参考系，其原点相对 S 系固定不动。



P 点相对 S' 系静止（图中两系原点重合）。S' 系中它不动，

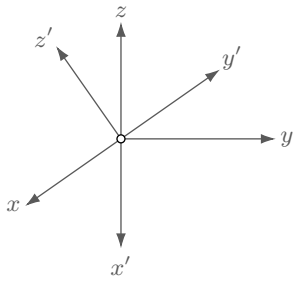
$$\vec{v}'=\dot{\vec{r}}'(t)=0;$$

S 系中

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t),\qquad \vec{v}=\dot{\vec{r}}(t)=\vec{\omega}\times\vec{r}'.$$

> $\vec{\omega}\times\vec{r}'$ **是 §1.2.4 的直接套用，不是新定义。** P 粘在 S' 系上，在 S 系看来只是被整个框架刚性地转着走；§1.2.4 已给出 $\mathrm{d}\vec{A}=\mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{A}$，取 $\mathrm{d}\vec{\theta}=\vec{\omega}\,\mathrm{d}t$、$\vec{A}=\vec{r}$，除以 $\mathrm{d}t$ 即得 $\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\times\vec{r}$。
>
> **为什么写 $\vec{r}'$。**此处原点重合、$\vec{r}=\vec{r}'$，数值无别；但转动是绕过 O' 的轴进行的，位矢必须从轴上的点量起——若 O' 不与 O 重合，转动贡献仍是 $\vec{\omega}\times\vec{r}'$。
>
> **又乘替你办了两件事。**大小：$|\vec{\omega}\times\vec{r}'|=\omega r'\sin\alpha=\omega\rho$，其中 ρ 是 P 到*转轴*的距离，即它划出那个圆的半径，于是 $v=\omega\rho$，回到 §1.2.3 的 $v=R\omega$；平行于轴的分量不参与转动，叉乘自动扣掉。方向：垂直于转轴与 $\vec{r}'$，即沿圆周切向。

一般地，设 S' 系相对 S 系的角速度与角加速度为 $\vec{\omega}$、$\vec{\beta}$。



方向矢量 $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ 在 S' 系中不动，但在 S 系中是转动的。对矢量函数 $\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x}' + y'(t)\hat{y}' + z'(t)\hat{z}'$ 求导：

$$S' \text{ 系：} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \dot{x}'\,\hat{x}' + \dot{y}'\,\hat{y}' + \dot{z}'\,\hat{z}' = \vec{v}', \qquad \vec{a}' = \ddot{x}'\,\hat{x}' + \ddot{y}'\,\hat{y}' + \ddot{z}'\,\hat{z}';$$

$$S \text{ 系：} \quad \vec{r}'(t) = x'(t)\hat{x}'(t) + y'(t)\hat{y}'(t) + z'(t)\hat{z}'(t), \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

其中 $\vec{v}_{\text{牵}} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ 与质点位置有关。

两行写的是同一个矢量，连分量都一样。 唯一的差别是**基矢算不算常量**：S' 系里那三根杆子钉死不动，求导只落在分量上；S 系里看它们自己在转、是 t 的函数——这就是 S 系那行要把 (t) 补在基矢上的原因，提醒你求导得用乘积法则。

于是 S 系里两个因子都要动。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{x}'\,\hat{x}' + \dot{y}'\,\hat{y}' + \dot{z}'\,\hat{z}'}_{=\,\vec{v}'} + \underbrace{x'\,\dot{\hat{x}}' + y'\,\dot{\hat{y}}' + z'\,\dot{\hat{z}}'}_{\text{基矢在转}}.$$

第二组用 §1.2.4 的 $\dot{\hat{A}} = \vec{\omega} \times \hat{A}$（三根基矢刚性跟着 S' 转、模长恒为 1）：

$$x'(\vec{\omega} \times \hat{x}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{y}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{z}') = \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

关键是叉乘对第二个因子线性，$\vec{\omega}$ 可提到括号外，而括号里恰好重新拼回 $\vec{r}'$。

易踩的坑：「求导」依赖于在哪个系里做。同一符号 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$ 在 S' 系等于 $\vec{v}'$、在 S 系等于 $\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$，讲义 p.11 专门标了「只在自身参考系中成立」。同理 $\vec{a}'$ 那行只剩二阶分量，且它是S' 系里量到的加速度，不是 S 系的 $\vec{a}$。而 $\vec{v}_{\text{牵}} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ 显含 $\vec{r}'$，故盘缘被带得快、靠轴的慢，与平动那个对所有点都一样的 $\vec{v}_{O'}$ 成对照。

回忆 $\vec{A} = A(t)\hat{A}$ 的时间导数

$$\dot{\vec{A}} = \underbrace{\dot{A}\,\hat{A}}_{\text{本体导数}} + \underbrace{\vec{\omega}_A \times \vec{A}}_{\text{转动牵连导数}},$$

其中 $\vec{\omega}_A$ 是 $\hat{A}$ 相对 S 系的角速度；在随 $\hat{A}$ 一起转动的 S' 系中只剩本体导数，$\dot{\vec{A}}\big|_{S'\text{系}} = \dot{A}\,\hat{A}$。

据此再对速度求一次导：

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\big)\Big|_{S\text{系}} = (\vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\beta} \times \vec{r}' \\ &= \vec{a}' + \vec{a}_{\text{牵}},\end{aligned}$$

$$\vec{a}_{\text{牵}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\beta} \times \vec{r}'.$$

只用两件事：上面刚得到的*换系求导法则* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{S'} + \vec{\omega}\times$（对任意矢量成立；讲义 p.12 对 $\vec{v}'$ 另写了一遍），以及叉乘的乘积法则。逐项算：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}\right|_S = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}', \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \times \vec{r}') = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{\vec{\beta}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right|_S}_{\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}.$$

这三块正是笔记那一行的三个括号。易错处是后一式括号里的 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$ *仍须是 S 系的*导数，不是 $\vec{v}'$。展开归并：

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'}_{2\vec{\omega} \times \vec{v}'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\beta} \times \vec{r}'.$$

那个 2 由两处各贡献一份：一份来自对 $\vec{v}'$ 换系求导，一份来自 $\vec{\omega}\times$ 作用在 $\dot{\vec{r}}'$ 的转动部分上——与 §1.4.1 柱坐标里 $2\dot{\rho}\dot{\phi}$ 的来历同构。

其中向心项在 $\vec{\omega}$ 沿定轴时可以化简：

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\xrightarrow{\vec{\omega}=\omega\hat{z}}\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_{xy})=-\omega^2\vec{r}'_{xy}.$$

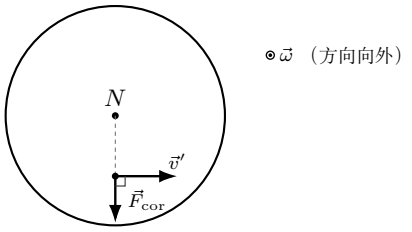
由 $\vec{F}=m\vec{a}=m\vec{a}'+m\vec{a}_{牵}$ 知，非惯性系中牛顿第二定律被破坏：

$$m\vec{a}'=\vec{F}-m\vec{a}_{牵}=\vec{F}+\vec{F}_{惯}=\vec{F}',$$

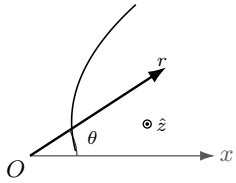
其中 $\vec{F}_{惯}$ 为惯性力，$\vec{F}'$ 为**表观合力**。**科氏力**为

$$\vec{F}_{\mathrm{cor}}=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}.$$

> 科氏力是**惯性力**，不是真实的相互作用：它来自把牛顿第二定律硬搬进转动系时必须补的 $-m\vec{a}_{牵}$ 里与 $\vec{v}'$ 有关的那一份，$-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$。在背景系 S 里根本没有这个力，它只在转动系里「看得见」。
>
> 由叉乘，它恒*垂直于* $\vec{v}'$，故不做功——只掰方向、不改变速率；$\vec{v}'$ 平行于 $\vec{\omega}$ 时为零。方向：北半球（$\vec{\omega}$ 指向纸外）俯视时把 $\vec{v}'$ 顺时针转 90°，即总是偏向运动方向的*右侧*，南半球相反。
>
> 图中 $\vec{v}'$ 取沿切向（与转动同向），此时科氏力恰好沿径向朝外——相当于「转得比参考系更快，于是被多甩出去一些」。



1.5.2.1 极坐标



取随极径一起转动的参考系为 S' 系，则 S' 相对 S：$\vec{\omega}=\dot{\theta}\,\hat{z}$，$\vec{\beta}=\ddot{\theta}\,\hat{z}$。

S' 系中质点只沿径向运动，

$$\vec{v}'=\dot{r}\,\vec{e}_r,\qquad \vec{a}'=\ddot{r}\,\vec{e}_r;$$

牵连量为

$$\vec{v}_{牵}=\vec{\omega}\times\vec{r}'=r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta,$$

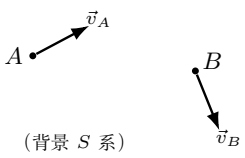
$$\vec{a}_{牵}=2\vec{\omega}\times\vec{v}'-\omega^2\vec{r}'_{xy}+\vec{\beta}\times\vec{r}'=2\dot{\theta}\dot{r}\,\vec{e}_\theta-\omega^2 r\,\vec{e}_r+\ddot{\theta}r\,\vec{e}_\theta.$$

于是 S 系中

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_{牵}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta,$$

$$\vec{a}=\ddot{r}\,\vec{e}_r+\vec{a}_{牵}=\big(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\big)\vec{e}_r+\big(2\dot{\theta}\dot{r}+r\ddot{\theta}\big)\vec{e}_\theta.$$

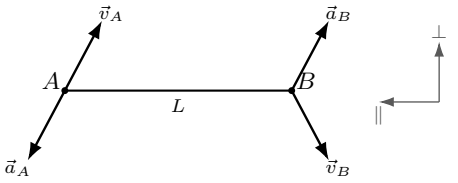
1.5.3 参考系中质点间的相对运动



两质点 A、B 在背景参考系 S 中运动。取 A **系**为随 A 一起相对 S 系平动的参考系，则（S 系中）B 相对 A 的运动即是 B 在 A 系中的运动：

$$\vec{v}'_B = \vec{v}_{B\text{对}A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A, \qquad \vec{a}_{B\text{对}A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A.$$

例 (平面刚性杆约束) A、B 在同一平面上运动并保持间距 L 不变，则 B 相对 A 作半径为 L 的圆周运动。



沿杆方向记作 $\parallel$、垂直杆方向记作 $\perp$。杆长不变给出

$$v_{B\text{对}A,\parallel} = v_{B\parallel} - v_{A\parallel} = 0.$$

故相对速度只有 $\perp$ 分量，

$$\vec{v}_{B\text{对}A} = v_{B\text{对}A,\perp}\,\hat{e}_\perp(t), \qquad \dot{\hat{e}}_\perp = \frac{v_{B\text{对}A,\perp}}{L}\,\hat{e}_\parallel.$$

而沿杆方向的相对加速度即该圆周运动的向心加速度：

$$a_{B\text{对}A,\parallel} = a_{B\parallel} - a_{A\parallel} = \frac{v^2_{B\text{对}A}}{L} = \frac{v^2_{B\text{对}A,\perp}}{L} \neq 0.$$

记 $u \equiv v_{B\text{对}A,\perp}$。

$\dot{\hat{e}}_\perp$ **从哪来。** B 相对 A 在半径 L 的圆上跑、速率 $|u|$，故这套基矢的角速度 $\omega = u/L$。$\hat{e}_\perp$ 模长恒为 1，其导数必垂直于自身，而平面内只剩 $\hat{e}_\parallel$ 一个方向，大小则是 $1\cdot\omega$ ——符号由图中两基矢的取向定。

加速度。 对 $\vec{v}_{B\text{对}A} = u\,\hat{e}_\perp$ 再求一次导（乘积法则）：

$$\vec{a}_{B\text{对}A} = \dot{u}\,\hat{e}_\perp + u\,\dot{\hat{e}}_\perp = \dot{u}\,\hat{e}_\perp + \underbrace{\frac{u^2}{L}}_{\text{向心}}\,\hat{e}_\parallel.$$

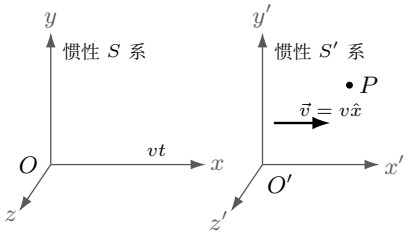
$\parallel$ 分量正是 v^2/L 型的向心加速度。又因 $v_{B\text{对}A,\parallel} = 0$，故 $v^2_{B\text{对}A} = u^2$，笔记里两种写法等价。

$\neq 0$ **的要害。** 沿杆的相对*速度*为零，沿杆的相对*加速度*却不为零——即 $a_{B\parallel} \neq a_{A\parallel}$：刚性杆两端沿杆的加速度分量并不相等。

1.6 Galileo 变换与 Lorentz 变换

1.6.1 Galileo 变换

惯性系：牛顿第一定律成立的参考系。



设 S' 系相对 S 系以 $\vec{v} = v\hat{x}$ 作匀速直线运动，并约定当 O-xyz 与 O'-$x'y'z'$ 完全重合时校准时钟，$t_0 = t'_0 = 0$。同一事件

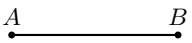
$$P:\begin{cases} x,\ y,\ z;\ t \\ x',\ y',\ z';\ t' \end{cases}$$

在绝对时间的假定下，两系时空坐标间的变换为 **Galileo 变换**：

$$\begin{cases} t' = t, \\ x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases} \qquad \begin{cases} t = t', \\ x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \end{cases} \qquad \vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}t.$$

性质：

1. 时间间隔测量的绝对性（同时的绝对性）： $\Delta t = \Delta t'$。
2. 长度测量的绝对性。对动尺长度的测量要求同时标定两端的位置：



$$\ell_{AB} = |\vec{r}_A(t) - \vec{r}_B(t)| = |\vec{r}'_A(t) - \vec{r}'_B(t)| = \ell'_{AB}.$$

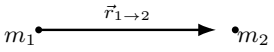
3. 速度叠加： $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$。
4. 加速度的绝对性： $\vec{a}' = \vec{a}$。

Galileo 相对性原理：力学定律的形式在所有惯性系中相同，

$$\vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F}' = m'\vec{a}' \qquad (\vec{F}' = \vec{F},\ m = m').$$

> $\vec{a}' = \vec{a}$ 只需把 $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ （ $\vec{v}$ 为常矢量）对 t 求两次导：一阶给 $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ ，二阶时常矢量 $\vec{v}$ 被导掉，故加速度在一切惯性系中相同——这是纯运动学的结论。
>
> 括号里那两条则是*额外假定*：牛顿力学中的力只依赖相互作用双方的相对位置与相对速度，而这些量在 Galileo 变换下不变，故 $\vec{F}' = \vec{F}$ ；质量是物体自身的标量属性，故 $m' = m$。三者合起来， $\vec{F} = m\vec{a}$ 的形式才在所有惯性系中一样。

等价表示：「绝对运动」不可测量。



$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{1\to 2},$$

式中 r_{12} 取**瞬时距离**。万有引力定律满足 Galileo 相对性原理：只要 $G' = G$。自洽性源于「瞬时超距」（只是近似）。但相互作用传播速度有限！

> **为何与相对性原理等价。**若一切力学定律在所有惯性系中形式相同，任何力学实验都分辨不出自己处在哪个惯性系，于是也测不出「自己相对于谁在动」——能测的只有相对运动。
>
> **万有引力为何满足。**它只依赖*同一时刻*的相对位矢 $\vec{r}_{1\to 2}$ ，而 Galileo 变换下相对位矢不变（ $\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ），质量也不变，故 $\vec{F}' = \vec{F}$ ，只需再设 $G' = G$。
>
> **自洽性为何源于「瞬时超距」。**公式用的是同一时刻的距离，而「同时」在 Galileo 变换下是绝对的，两系说的「瞬时距离」才是同一件事。若作用以有限速度传播， $\vec{F}$ 依赖的便是*过去*的位置，而「过去多久」依赖参考系——绝对同时一失效，这份自洽就崩了。

1.6.2 狭义相对论的基本原理

1. **相对性原理**：物理规律在所有惯性系中有相同的形式。
2. **相互作用传播速度有限 $\Longrightarrow c \Longrightarrow$ 光速不变原理**。

1860's ， Maxwell 理论给出

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2},$$

$$c=\sqrt{\frac{4\pi k}{\mu_0}}=\sqrt{\frac{4\pi\times 9\times 10^9}{4\pi\times 10^{-7}}}\ \mathrm{m/s}=3\times 10^8\ \mathrm{m/s}.$$

「以太」参考系（宇宙背景：最特殊）。Michelson–Morley 实验：干涉条纹没有移动！ → 地球就是以太系？？ × 电动力学满足相对性原理？ ⟺ 光速不变。

实验测的是什么。 1887 年 Michelson 与 Morley 在 Cleveland 用 **Michelson 干涉仪**：一束光经半透半反镜分成两束，沿*相互垂直*的两臂各自往返后重新汇合成干涉条纹。若以太存在，地球以 $v\approx 30\,\mathrm{km/s}$ 穿过它，两臂往返的时间就该不同。

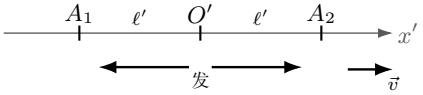
两臂的时间正是本节的两段算法。记 $\beta=v/c$、臂长均为 L。沿运动方向那条臂，去回程的相对速度是 $c-v$ 与 $c+v$（同 §1.6.2.1）；垂直那条臂光须斜着走（同 §1.6.2.2 的三角形，半程满足 $(ct)^2=L^2+(vt)^2$）：

$$t_\parallel=\frac{2L/c}{1-\beta^2},\qquad t_\perp=\frac{2L/c}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \Delta t=t_\parallel-t_\perp\approx\frac{L}{c}\beta^2.$$

一阶效应正好抵消、只剩 β^2 ——这是非用干涉仪不可的原因。转 90° 令两臂互换，光程差改变 $2L\beta^2$，条纹应移过 $\Delta N=2L\beta^2/\lambda$ 条。取 $\beta=10^{-4}$、$L\approx 11\,\mathrm{m}$、$\lambda\approx 550\,\mathrm{nm}$ 得 $\Delta N\approx 0.4$，而仪器能分辨约 0.01 条。

结果与两条岔路。条纹没有移动。出路一是地球拖着以太一起走（即「地球就是以太系」），但这与恒星光行差矛盾，也把地球抬成了特殊参考系，故笔记打了 ×；出路二是放弃以太、承认光速不变。（讲义未涵盖此实验，以上数值取自通行文献。）

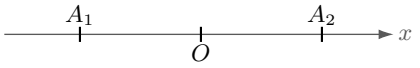
1.6.2.1 同时的相对性



S' 系某时刻在 O' 处向两侧发射光信号，以期校准 A_1、A_2 两处的时钟。取 $\ell'=1\ \mathrm{c\cdot h}$，则 S' 系中两处同时收到信号：

$$t_1'=t_2'=\frac{\ell'}{c}.$$

换到 S 系：



因光速不变，S 系中光「相遇」A_1 的相对速度为 $c+v$、「追击」A_2 的相对速度为 $c-v$，故

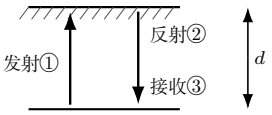
$$t_1=\frac{\ell'}{c+v},\qquad t_2=\frac{\ell'}{c-v},$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{2v\ell'}{c^2-v^2}\xrightarrow{c\gg v}0.$$

此式把 S' 系的静长 ℓ' 直接当作了 S 系中的距离——尺缩效应此时还没讲到。§1.6.3 重做同一问题时代入动长 $l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$，得 $\Delta t=\frac{2vl_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，与此式相差一个 $\sqrt{1-\beta^2}$ 因子。定性结论（A_1 先收到、A_2 后收到，$c\gg v$ 时趋于同时）不受影响。

1.6.2.2 相对效应

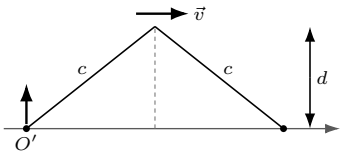
钟慢效应. S' 系中放一只光钟：光自下方光源发出（事件①），在相距 d 的镜面反射（事件②），再回到光源处被接收（事件③）。



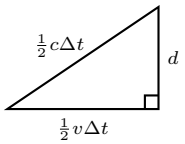
在随动的惯性系 S' 中

$$\Delta t'_{3-1} = \frac{2d}{c}.$$

相对 S 系，这只钟整体以 $\vec{v}$ 向右平动，光走的是一条折线：



取折线的前一半构成直角三角形：



$$d^2 + \left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}c\Delta t\right)^2 \implies (c^2 - v^2)\Delta t^2 = 4d^2,$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

若按经典速度叠加，传播时间不变；由光速不变则得 $\Delta t > \Delta t'$ ，即**时间膨胀效应**，俗称「钟变慢」。

两个事件（①发射与③接收）在 S' 系中发生在同一处：

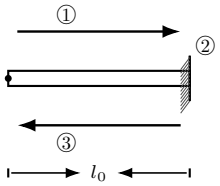
$$\Delta t' = t_3 - t_1 = \frac{2d}{c}, \qquad \Delta x' = x_3 - x_1 = 0.$$

钟慢公式：

$$\text{若}\Delta x' = 0,\ \text{则}\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t \quad (\Delta x \neq 0); \qquad \text{若}\Delta x = 0,\ \text{则}\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t'.$$

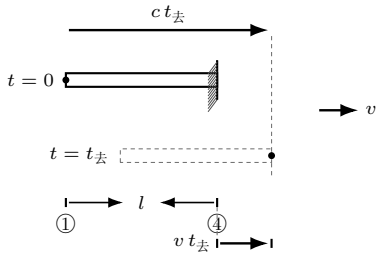
> 两式说的是同一件事，只是谁在「同地」测换了个人。S 与 S' 地位对等：S' 相对 S 以 v 运动，S 相对 S' 以 $-v$ 运动，而 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 只含 v^2、换号不变，故把两系角色互换即得第二式——这是相对性原理的直接要求。
>
> **看似矛盾，其实前提不同。**同一对事件不可能既 $\Delta x' = 0$ 又 $\Delta x = 0$ （除非 $v = 0$ ），两式永不同时适用。第一式的前提是两事件在 S' 中同地发生（那只随动光钟的①发射与③接收），此时 S' 读到的是原时；第二式则是把光钟改放到 S 系里。**谁同地测，谁读到的时间就短，短的那个就是原时。**
>
> 此处尚未引入 Lorentz 变换，故这条靠对称性写下；§1.6.3 可一步验证：$\Delta t' = \gamma\big(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\big)\big|_{\Delta x = 0} = \gamma\Delta t$。

尺缩效应. 把光钟横放，沿尺量：光从左端发出（①），在右端镜面反射（②），再回到左端被接收（③）。

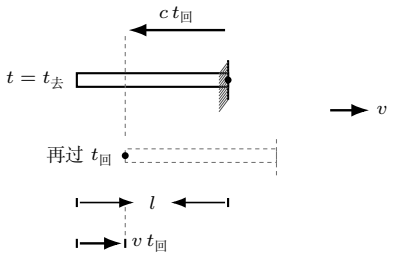


S' 系：尺静止，长度为静长 l_0

S 系中尺以 v 右移、长度为动长 l。要紧的是：光在飞的时候尺也在动。下面两图各画出同一根尺的两个时刻（虚线为后一时刻）。



S 系：去程——光追逃走的镜面



S 系：回程——光与迎来的左端相向

去程：光要追上正在逃走的镜面。这段时间里光走 $c\,t_{去}$、镜面走 $v\,t_{去}$，光比镜面多走的那一段正是杆长：

$$c\,t_{去}-v\,t_{去}=l \qquad\Longrightarrow\qquad t_{去}=\frac{l}{c-v}.$$

回程：光与迎面而来的左端相向而行。两者走过的路程之和等于杆长：

$$c\,t_{回}+v\,t_{回}=l \qquad\Longrightarrow\qquad t_{回}=\frac{l}{c+v}.$$

这就是「相对速度 $c\mp v$」那种说法的来处：光速本身在两系中都是 c，变的只是光与镜（或与左端）的接近速率。两段相加，

$$\Delta t=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2cl}{c^2-v^2}=\frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

另一方面，①发射与③接收这两个事件在 S' 系中发生在同一处（都在尺的左端），故可用钟慢公式：

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \Delta t'=\frac{2l_0}{c}.$$

两式相等即解出动长：

$$\frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2l_0}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad\Longrightarrow\qquad l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}<l_0.$$

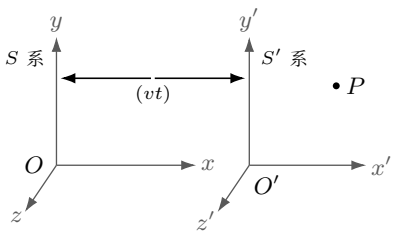
图中①与④是在 S 系中同时标定尺两端的一对事件（ $t_4-t_1=0$ ），量得的 Δx 就是动长 l。

尺缩公式：

$$\text{当}\Delta t=t_4-t_1=0,\ \text{则}\Delta x=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x' \quad(\Delta t'\neq 0);$$

$$\text{当}\Delta t'=0,\ \text{则}\Delta x'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x \quad(\Delta t\neq 0).$$

1.6.3 Lorentz 变换



同一事件

$$P:\begin{cases}x,\ y,\ z;\ t\\ x',\ y',\ z';\ t'\end{cases}$$

约定当 O-xyz 与 O'-$x'y'z'$ 重合时 $t_0=t_0'=0$。

事件发生处与 y' 轴的距离。这段距离在 S' 系中量得 x'，随 S' 系一起静止，是**静长**；在 S 系中量得 $x-vt$，是**动长**。由尺缩公式

$$x-vt=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,x' \qquad\Longrightarrow\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

事件发生处与 y 轴的距离。这段距离在 S 系中量得 x，是静长；在 S' 系中量得 $x'+vt'$，是动长。同理

$$x'+vt'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,x \qquad\Longrightarrow\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

把前式代入后式消去 x'：

$$x=\frac{x-vt}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{-\frac{v^2}{c^2}x+vt}{1-\frac{v^2}{c^2}}\implies t'=\cdots$$

于是得 **Lorentz 变换**及其**逆变换**：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\[2mm] t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\[2mm] y'=y,\quad z'=z, \end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\[2mm] t=\dfrac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\[2mm] y=y',\quad z=z'. \end{cases}$$

前面三条运动学效应都可以从这组变换直接读出。

若 $\Delta x'=0$：

$$\Delta t=\left.\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{\Delta x'=0}=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \Delta t'=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t=\Delta\tau,$$

其中 τ 是**固有时**（**原时**）。

若 $\Delta t=0$：

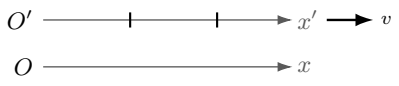
$$\Delta x'=\left.\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{\Delta t=0}=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \Delta x=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x',$$

$$\Delta t'=\left.\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{\Delta t=0}=\frac{-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

其中 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 为**尺缩因子**。

若 $\Delta t'=0$：

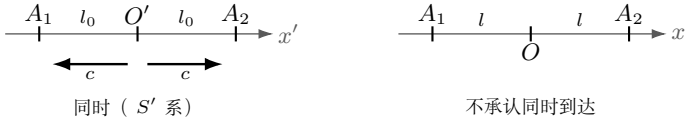
$$\Delta t=\frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$



即沿相对运动方向**时序依次落后**。

> 「时序」指事件发生的先后次序，「依次落后」指这次序随位置逐段推移。
>
> 设在 S' 系的 x' 轴上排一列钟，让它们在 $t'=0$ 同时各敲一下（即 $\Delta t'=0$）。S 系看来这些敲并不同时——位置每往 $+x'$ 挪 $\Delta x'$，那一敲就推迟 $\Delta t=\gamma\frac{v}{c^2}\Delta x'$。于是 S 系看到的不是齐刷刷一响，而是*一列依次推迟的敲击*。等价的说法：在 S 的某一瞬间去读那排钟，由 $t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)$，$x$ 越大 t' 越小——越靠前的钟读数越小。
>
> **先后方向由 $\Delta x'$ 的正负定，不要去背「前面的早还是晚」。**后面「尺缩的相对性」用的是反向那一支（$\Delta t=0$、换到 S' 看），结论就反过来：靠前的 BB' 先相遇、AA' 后相遇。

同时的相对性（重做）. S' 系中 O' 处同时向两侧发光，A_1、A_2 与 O' 各相距静长 l_0：



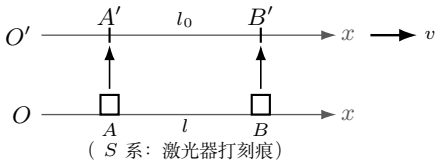
S 系中这两段距离是动长 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，故

$$t_2 = \frac{l}{c-v}, \qquad t_1 = \frac{l}{c+v},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2vl}{c^2-v^2} = \frac{2vl}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v\cdot 2l_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

式中 $2l_0$ 即 $\Delta x'$。

尺缩的相对性. 地面 S 系上固定两台激光器 A、B，相距 l；木杆以 v 相对地面运动。某时刻两台激光器同时发射激光，在杆上刻下痕迹 A'、B'。

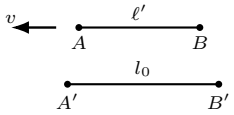


S 系中 $\Delta t = 0$：① AA' 相遇，② BB' 相遇。l 是动长、l_0 是静长，

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

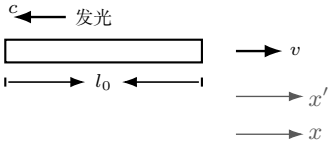
即 $\Delta t = 0$（同时发射激光）下的 $\Delta x = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x'$ 才是动尺长度测量。

而在 S' 系中（杆静止、两台激光器以 $-v$ 运动）这两个事件并不同时：AA' 后相遇、BB' 先相遇，即时序依次落后。



$$|\Delta t'| = \frac{v}{c^2}l_0, \qquad \ell' + \frac{v}{c^2}l_0\cdot v = l_0 \implies \ell' = \Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)l_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\ell.$$

杆头发光、杆尾接收. 静长为 l_0 的杆以 v 相对地面运动，其头部（前端）发出光信号，沿杆向后传至尾部被接收。



S' 系（随杆）中 $\Delta t' = \dfrac{l_0}{c}$。$S$ 系中不能直接套钟慢公式，

$$\Delta t \neq \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

正确的两条路：一是结合尺缩与运动学，杆的动长 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ，光与迎面而来的尾部相对速度为 $c+v$ ，

$$\Delta t = \frac{l}{c+v} = \frac{l_0}{c}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}};$$

二是直接用 Lorentz 变换，取 $\Delta t' = \dfrac{l_0}{c}$、$\Delta x' = -l_0$ ，

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

记号约定. 以下记 $\beta = \dfrac{v}{c}$ ， $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$。

1.6.4 Lorentz 与 Galileo 变换关系

$v \ll c$ 时回到 Galileo 变换：

$$x' = x - vt, \qquad t' = t - \frac{v}{c^2}x \xrightarrow{x\ll ct} t' = t, \qquad y' = y, \quad z' = z.$$

1.6.5 绝对时空观

绝对时空观下 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$ ，空间部分是欧氏空间 E^3 ，其线元

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \mathrm{d}x^i\,\delta_{ij}\,\mathrm{d}x^j,$$

其中 δ_{ij} 是**欧氏度规**， $(\delta_{ij}) = \mathbb{1}$ 为单位矩阵。作线性坐标变换

$$\mathrm{d}\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^i{}_j\,\mathrm{d}x^j,$$

> $\tilde{x}$ 是转动后的新坐标（撇号已被「另一个参考系 S'」占用，故改用波浪线——这里说的是同一参考系内把坐标轴转一下）。R 是 3×3 转动矩阵， $R^i{}_j$ 是它的矩阵元：上标 i 标行（新坐标的编号）、下标 j 标列（旧坐标的编号）。写成一上一下是为了配合 Einstein 求和约定——重复的上下指标自动求和，此处即对 j 求和，故右端的 $\sum$ 通常省掉不写。

要求线元不变：

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\tilde{x}^i\delta_{ij}\,\mathrm{d}\tilde{x}^j = R^i{}_k\,\mathrm{d}x^k\,\delta_{ij}\,R^j{}_l\,\mathrm{d}x^l \overset{!}{=} \mathrm{d}x^k\delta_{kl}\,\mathrm{d}x^l,$$

即

$$R^i{}_k\delta_{ij}R^j{}_l = \delta_{kl}, \qquad \left(R^{\mathsf{T}}\mathbb{1}R\right)_{kl} = (\mathbb{1})_{kl}, \qquad R^{\mathsf{T}}\mathbb{1}R = \mathbb{1}, \qquad R \in O(3).$$

又 $R^{\mathsf{T}}R = \mathbb{1}$ 给出 $\det(R^{\mathsf{T}}R) = (\det R)^2 = 1$ ，故 $\det R = \pm 1$ ； $R^{\mathsf{T}}R = \mathbb{1}$ 与 $\det R = +1$ 两条合起来即 $SO(3)$ ，而 $\det R = -1$ 的那一支可写成 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} R$ 的形式。

以二维为例，记 $R = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix} = (\vec{A}_1,\ \vec{A}_2)$ ，则

$$R^{\mathsf{T}}R = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2\\ a_1a_2+b_1b_2 & a_2^2+b_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

即两列互相正交且均为单位矢量，故

$$R = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

1.6.6 四维时空

$$x^\mu = (\underbrace{ct}_{\text{时间}},\ \underbrace{x,\ y,\ z}_{\text{空间}}),\qquad \mu = 0,1,2,3.$$

Lorentz 变换在 0–1 两个分量上写成

$$\tilde{x}^0 = \gamma\big(x^0 - \beta x^1\big),\qquad \tilde{x}^1 = \gamma\big(x^1 - \beta x^0\big),\qquad \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1.$$

于是有**时空区间不变量**：

$$\big(\mathrm{d}\tilde{x}^0\big)^2 - \big(\mathrm{d}\tilde{x}^1\big)^2 = \big(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2\big)\Big[\big(\mathrm{d}x^0\big)^2 - \big(\mathrm{d}x^1\big)^2\Big] = \big(\mathrm{d}x^0\big)^2 - \big(\mathrm{d}x^1\big)^2.$$

推广到四个分量，定义**时空间隔**

$$(\mathrm{d}s)^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - \big[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\big] = \mathrm{d}x^\mu g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu,$$

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \textbf{Minkowski 度规}.$$

把四维线性变换写成 $\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\ \mathrm{d}x^\nu$ ，则间隔不变即

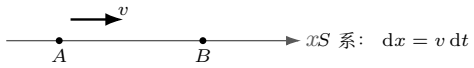
$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\tilde{x}^\mu g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\tilde{x}^\nu = \mathrm{d}x^\alpha g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\beta \qquad\Longrightarrow\qquad \Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = g,$$

这就是 **Lorentz 变换**的定义式——与 E^3 中 $R^{\mathsf{T}}\mathbb{1}R = \mathbb{1}$ 完全平行，只是把欧氏度规 $\mathbb{1}$ 换成了 Minkowski 度规 g。

1.6.6.1 间隔的分类

沿 x 方向的运动给

$$(\mathrm{d}s)^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 \xrightarrow{S\text{ 系}} \big(c^2 - v^2\big)(\mathrm{d}t)^2 \xrightarrow{S'\text{ 系}} \big(c^2 - v'^2\big)(\mathrm{d}t')^2.$$



1. $v = c \Longrightarrow (\mathrm{d}s)^2 = 0 \Longrightarrow$ 任意参考系中 $v' = c$ ，即**光速不变原理**。
2. $v < c \Longrightarrow (\mathrm{d}s)^2 = \big(c^2 - v^2\big)(\mathrm{d}t)^2$ ，记为 $c^2(\mathrm{d}\tau)^2$。取随动 S' 系（ $v' = 0$ ）则 $(\mathrm{d}s)^2 = c^2(\mathrm{d}t')^2$ ，故 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'$ 是**原时间隔**，
$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \mathrm{d}t.$$

1.6.6.2 「0-1」平面转动

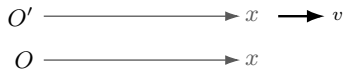
只看 0–1 两个分量，记 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ ，则

$$\Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 - b_1^2 & a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1a_2 - b_1b_2 & a_2^2 - b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

与 E^3 那里的 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 相对照，这里要求的是平方之差为 1 ，故三角函数换成双曲函数：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix},\qquad c\tilde{t} = \cosh\psi\cdot ct - \sinh\psi\, x,\qquad \tilde{x} = -\sinh\psi\cdot ct + \cosh\psi\, x.$$



取 S' 系原点的运动定出 ψ：它满足 $\Delta x' = 0$，而 S 系中 $\Delta x = v\Delta t$，故

$$\Delta\tilde{x} = -\sinh\psi \cdot c\Delta t + \cosh\psi \underbrace{\Delta x}_{v\Delta t} = 0 \implies \tanh\psi = \frac{v}{c} = \beta.$$

再由 $1 - \tanh^2\psi = \dfrac{\cosh^2\psi - \sinh^2\psi}{\cosh^2\psi}$ 得

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma, \qquad \sinh\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta.$$

最后，由 $\Lambda^{\mathsf{T}} g \Lambda = g$ 取行列式得 $(\det\Lambda)^2 \det g = \det g$，故 $\det\Lambda = \pm 1$，$\det\Lambda = +1$ 时为**恰当**的。保度量的（狭义）Lorentz 变换因而分为两类——**Boost 变换**与 E^3 转动，二者统称为 Lorentz 变换；再加上时空平移，即得 **Poincaré 变换**。三维空间部分写成矢量形式便是

$$(\mathrm{d}s)^2 = (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

第二章　牛顿定律 动量定理

2.1 Newton 定律

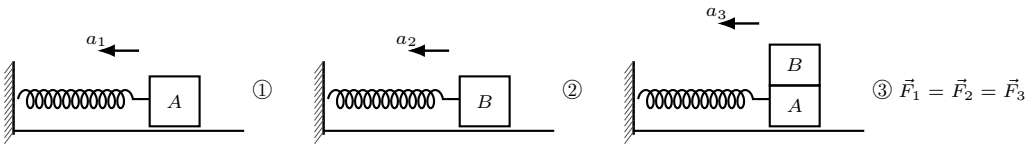
2.1.1 牛顿定律

牛顿第一定律. 任何物体保持静止 / 匀速直线运动状态，除非作用于它的力迫使它改变 $\Longrightarrow$ **惯性系**。

检验：在一定精度内寻找惯性系。

1. 地面系： $\omega = \dfrac{2\pi}{86400} = 7.27 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s}$ ， $a_{自} \sim \omega^2 R_e \sim 3.4 \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2} \ll 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ ，近似为惯性系。
2. 地心系： $a_{公} \sim \omega_{公}^2 r \sim 5.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$。
3. 太阳参考系： $a_{日} \sim 10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$。
4. $\mathrm{FK_4}$ ： 以 1535 颗恒星的平均静止位形为基准。

牛顿第二定律. 惯性系中，质点受力 $\vec{F} = m\vec{a}$ ——它同时**定义了质量和力**。



1. 约定 $m_A = 1\ \mathrm{kg}$ ， 测 $a_1 \Longrightarrow \vec{F}_1 = m_A \cdot a_1 = 1\ \mathrm{kg} \cdot a_1$。
2. 设弹簧伸长量一样，则 $F_2 = F_1$ ； 测 a_2 ， 得 $m_B = \dfrac{F_2}{a_2} = \dfrac{a_1}{a_2} m_A$。
3. 预言
$$a_3 = \frac{m_A a_1}{m_A + m_B} = \frac{a_1}{1 + \frac{a_1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

其中用到 $m_{AB} = m_A + m_B$ ，即**质量守恒**（假定）。

1 kg ： 大 K 砝码 $\longrightarrow$ 定义 $h = 6.626\cdots \times 10^{-34}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$ （**普朗克常量**） $\Longrightarrow$ 导出单位 $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$。

牛顿第三定律. 质点间相互作用力。



1. $\vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = 0$ ；
2. $\vec{F}_{1\to2} \parallel \vec{F}_{2\to1}$。

引入**势能函数** $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ，

$$\vec{F}_{2\to1} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1}, \qquad \vec{F}_{1\to2} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2}.$$

空间平移、转动不变要求 V 只能依赖相对位置 $r_{12}=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$（不依赖参考点），故 $V=V(r_{12})$。

> $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ 本来要 6 个数，两条对称性把它压到 1 个。
>
> **平移不变**：整个系统挪一段 $\vec{a}$ 物理不变，故对任意 $\vec{a}$ 有 $V(\vec{r}_1+\vec{a},\vec{r}_2+\vec{a})=V(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$。取 $\vec{a}=-\vec{r}_2$ 即知 V 只能通过*差* $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 依赖位置——$6\to3$。
>
> **转动不变**：系统整体绕原点转 R 物理也不变，故 $V(R\vec{r}_{12})=V(\vec{r}_{12})$ 对*一切* R 成立；而转动能把一个矢量转到任何等长的矢量上，所以 V 只剩下依赖*模长*——$3\to1$，即 $V=V(r_{12})$。
>
> **于是牛顿第三定律的两条不再是额外假设。**V 只含 r_{12}，链式法则里唯一的矢量因子就是 $\partial r_{12}/\partial\vec{r}_1=\hat{r}_{2\to1}$，力只能沿连线（径向力）；又 $\hat{r}_{1\to2}=-\hat{r}_{2\to1}$，等大反向也一并出来。

由 $\partial_{\vec{r}}r=\vec{\nabla}r=\hat{r}$，用链式法则

$$\vec{F}_{2\to1}=-\frac{\partial V}{\partial r_{12}}\frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}.$$

其中（记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）

$$\partial_x r=\frac{x}{r},\qquad \vec{\nabla}r=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{r}=\frac{\vec{r}}{r};$$

把 r 换成 $r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$、$\vec{r}_{2\to1}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$，即得

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}=\hat{r}_{2\to1},\qquad \frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_2}=\hat{r}_{1\to2}.$$

> 先说清 $\partial/\partial\vec{r}_1$ 是什么：它是对 $\vec{r}_1$ 的三个分量分别求偏导、再拼成的矢量，也就是以 $\vec{r}_1$ 为自变量的梯度。
>
> **直接算。**由 $r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 得 $\dfrac{\partial r_{12}}{\partial x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{r_{12}}$，三个分量拼起来就是
>
> $$\frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}=\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{r_{12}}=\hat{r}_{2\to1}.$$
>
> 这正是刚证过的 $\vec{\nabla}r=\vec{r}/r$，只不过把原点搬到了质点 2 上。改对 $\vec{r}_2$ 求导，每个分量多一个负号，于是 $-\hat{r}_{2\to1}=\hat{r}_{1\to2}$。
>
> **几何上一眼看穿。**梯度指向该量*增长最快的方向*：要让两点距离长得最快，就该把质点 1 沿*背离*质点 2 的方向挪——那正是 $\hat{r}_{2\to1}$；而且沿这个方向每挪单位长度，距离恰好增加 1，所以模长正好是 1，结果只能是个单位矢量。

于是两个力都沿两质点连线（**径向力**）：

$$\vec{F}_{2\to1}=-\frac{\partial V}{\partial r_{12}}\hat{r}_{2\to1},\qquad \vec{F}_{1\to2}=-\frac{\partial V}{\partial r_{12}}\hat{r}_{1\to2}.$$

相对论中. 四速度

$$\eta^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\xrightarrow{S\text{ 系}}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

定义质量：随动惯性系 S_0 中的 m，满足 $\vec{F}_0=m\vec{a}_0$，称**静质量**，它是 Lorentz 标量。

由此定义**四动量**

$$P^\mu=m\eta^\mu\xrightarrow{S\text{ 系}}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}},\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

其空间部分即 **3-动量**

$$\vec{P}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\xrightarrow{\beta\ll1}m\vec{v}.$$

> 整段只有一条主线：**用不变量去搭四矢量**。
>
> 牛顿的 $m\vec{v}$ 搬不过来，毛病在两处：分母的 $\mathrm{d}t$ 依赖参考系，m 若随速度变也不是不变量。于是两处都换掉——时间换成*原时* $\mathrm{d}\tau$（Lorentz 不变），质量改用*随动系里测的*那个 m（S_0 中牛顿第二定律成立，$\vec{F}_0=m\vec{a}_0$），它是所有观察者都同意的一个数，即 Lorentz 标量。
>
> 这样 $\mathrm{d}x^\mu$ 是四矢量、$\mathrm{d}\tau$ 与 m 是标量，故 $\eta^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$ 与 $P^\mu=m\eta^\mu$ 自动都是四矢量——这正是要的。其空间部分低速回到 $m\vec{v}$，时间分量则给出能量 $P^0=E/c$。

动量定律

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\xrightarrow{\beta\ll 1}\vec{F}=m\vec{a},$$

展开则为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{m\vec{v}\left(\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\xrightarrow{v\to 0}m\vec{a}.$$

两项来自乘积法则：$\vec{P}=\gamma m\vec{v}$ 里 γ 与 $\vec{v}$ 都随时间变，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\gamma m\vec{a}+m\vec{v}\dot{\gamma},\qquad \dot{\gamma}=\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2},$$

代入即上式。要害是第二项沿 $\vec{v}$、第一项沿 $\vec{a}$ ——**相对论里 $\vec{F}$ 与 $\vec{a}$ 一般不平行**，只有 $\vec{v}\perp\vec{a}$（第二项为零）或 $v\to 0$ 时才退回 $\vec{F}=m\vec{a}$。它在高速下失效不是因为「质量变了」（m 是标量、不变），而是因为 γ 也在随时间变。

时间分量 $P^0=\dfrac{E}{c}$ 给出**能量**

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)=mc^2+\underbrace{\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2}+\cdots}_{\text{相对论性动能}},$$

其中 $E_0=mc^2$ 为**静能**（不变）。**时空平移**：$x^\mu\Rightarrow x'^\mu=x^\mu+\varepsilon^\mu$。

能动量关系

$$E^2-\vec{P}^2c^2=\frac{m^2c^4-m^2c^2v^2}{1-v^2/c^2}=m^2c^4,\qquad \vec{v}=\frac{c^2\vec{P}}{E}.$$

对能动量关系求导：$2E\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}-2c^2\vec{P}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{c^2\vec{P}}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot\vec{F}\qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{d}E=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}E_k.$$

第一式怎么来。把 $E=\gamma mc^2$、$\vec{P}=\gamma m\vec{v}$ 代进去：

$$E^2-\vec{P}^2c^2=\gamma^2m^2c^2\left(c^2-v^2\right)=\frac{m^2c^2(c^2-v^2)}{1-v^2/c^2}=m^2c^4.$$

要害是右端只剩 m 与 c：E 与 $\vec{P}$ 各自随参考系变，这个组合却不变（它正是四维标积 $P^\mu P_\mu$）。第二式 $\vec{v}=c^2\vec{P}/E$ 把 γm 约掉即得。

求导那一步。右端 m^2c^4 是常量、导数为零；左端 $\vec{P}^2=\vec{P}\cdot\vec{P}$，按点乘的乘积法则给出 $2\vec{P}\cdot\dot{\vec{P}}$，故 $2E\dot{E}-2c^2\vec{P}\cdot\dot{\vec{P}}=0$。解出 $\dot{E}=\dfrac{c^2\vec{P}}{E}\cdot\dot{\vec{P}}$，再代 $\dfrac{c^2\vec{P}}{E}=\vec{v}$ 与 $\dot{\vec{P}}=\vec{F}$，就是功率公式 $\dot{E}=\vec{v}\cdot\vec{F}$；乘 $\mathrm{d}t$ 即 $\mathrm{d}E=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$。

意义。$E=\gamma mc^2$ 本来只是「四动量的时间分量」这么一个定义；这里证明了它的变化率恰等于外力做功的功率，它才有资格叫能量。又因 $E=mc^2+E_k$ 里 mc^2 不变，故 $\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_k$。

2.1.2 单位和量纲

单位：把物理定律数字化，如 $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}$。

量纲式：取基本量纲 M,L,T，则

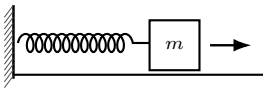
$$[E]=\left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]=M\cdot L^2\cdot T^{-2},\qquad [\vec{F}]=[ma]=M\cdot L\cdot T^{-2},$$

$$[\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}]=[FL]=M\cdot L^2\cdot T^{-2}=[E].$$

量纲法则：

1. 只有量纲相同的物理量才能相加减、相等；
2. e^x、$\ln x$、$\sin x$ 的宗量 x 必无量纲（量纲为 1）：$[x]=M^0L^0T^0=1$。

例 弹簧振子如图， A 为振幅，设周期 $T\sim k^\alpha m^\beta A^\gamma$。



量纲为 $[A]=L$、$[m]=M$、$[k]=\left[\frac{F}{L}\right]=MT^{-2}$，故

$$T=[k^\alpha m^\beta A^\gamma]=M^{\alpha+\beta}\,T^{-2\alpha}\,L^\gamma.$$

比较两边指数： $\alpha+\beta=0$， $\gamma=0$， $-2\alpha=1$，解得 $\alpha=-\frac{1}{2}$、$\beta=\frac{1}{2}$，

$$T\sim\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2.2 相互作用力

2.2.1 四种基本相互作用

	力程		相对强度
万有引力	∞ （长程力）		$10^{-36}\sim10^{-42}$
电磁力	∞ （长程力）		10^{-2}
强相互作用	$1\,\mathrm{fm}=10^{-15}$ m （原子核尺度）	（短程力）	1
弱相互作用	10^{-18} m （短程力）		10^{-14}

弱相互作用的一例： $n\to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$。

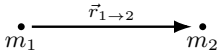
取 $e=1.602\times10^{-19}$ C、$m_p=1.67\times10^{-27}$ kg、$m_e=9.11\times10^{-31}$ kg，比较两质子间的万有引力与电磁力：

$$\frac{Gm_p^2}{ke^2}\sim\frac{6.67\times10^{-11}\cdot(1.67\times10^{-27})^2}{9\times10^9\cdot(1.6\times10^{-19})^2}\sim10^{-36};$$

换成电子（ $m_p\to m_e$ ）则为 10^{-42}。∴ 万有引力最弱!

2.2.2 万有引力

$$\vec{F}_{1\to2}=-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{1\to2},\qquad G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\ （\textbf{万有引力常量}）.$$



地面附近展开

$$\frac{GM_em}{(R_e+h)^2}\xrightarrow{h\ll R_e}m\frac{GM_e}{R_e^2}+\cdots,\qquad g=\frac{GM_e}{R_e^2}\implies M_e=\frac{gR_e^2}{G}.$$

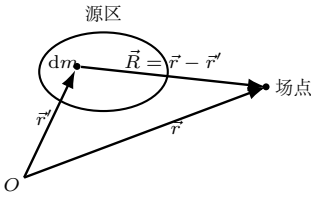
其中两条要点：**平方反比律**；**引力荷**即质量 $\Longrightarrow$ **引力质量**。又 $m_{引}=m_{惯}\Longrightarrow$ **等效原理**，即 $\frac{m_{引}}{m_{惯}}g\to g$，实验精度内无偏差。

引力场强

$$\vec{E}_G=\frac{\vec{F}_{m_0}}{m_0}=\vec{E}_G(\vec{r}),\qquad 点源m：\ \vec{E}_G=-\frac{Gm}{r^2}\,\hat{r}.$$



引力场强叠加原理：$\vec{E}_G = \sum_i \vec{E}_{G_i}$。对连续分布，



$$\mathrm{d}m = \rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3\vec{r}', \qquad \vec{E}_G(\vec{r}) = -G\int \frac{\rho(\vec{r}')\,\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'.$$

源区就是有质量分布的那块空间，其外 $\rho = 0$，积分只需在它上面做。要紧的是别把两套记号混了：带撇的 $\vec{r}'$ 是源点（积分变量，跑遍源区），不带撇的 $\vec{r}$ 是场点（固定不动，是要求场的地方），$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ 是自源点指向场点的位移。

第一式只是质量密度定义的反写：在源点附近取一小块体积 $\mathrm{d}^3\vec{r}' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$，它装的质量就是 $\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3\vec{r}'$。

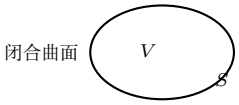
第二式：切块再叠加。把源切成无穷多小块，每块 $\mathrm{d}m$ 都当点源用。点源公式 $-\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$ 里的 r 是源到场点的距离、$\hat{r}$ 是源指向场点的单位矢量，搬过来即

$$\mathrm{d}\vec{E}_G = -\frac{G\,\mathrm{d}m}{R^2}\,\hat{R} = -\frac{G\,\mathrm{d}m}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{G\,\mathrm{d}m\,\vec{R}}{R^3}.$$

分母是 R^3 而不是 R^2，正是把 $\hat{R}$ 写成 $\vec{R}/R$ 多出来的那个 R。再按叠加原理把所有小块加起来（求和变积分）、代入第一式，就是上式。

2.2.2.1 Gauss 定理

这是平方反比引力与斥力场的普遍定理。对闭合曲面 S 及其包围的区域 V，通量



$$\oiint_S \vec{E}_G \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G \iiint \rho\,\mathrm{d}V,$$

只与区域内的总质量有关，与区域内的分布无关。

通量在数什么。把闭合面切成小片，每片算「有多少场穿过它」，再全部加起来；$\mathrm{d}\vec{S}$ 约定朝外，故穿出为正、穿入为负。引力场处处指向质量，所以通量是负的——右端那个负号就是这么来的。

定理在说什么。面内的质量怎么摆都无所谓（挤成一点、摊成球壳、乱堆一气），只要总量相同，穿过面的总通量就相同；而面外的质量，场线穿进来多少就穿出去多少，净贡献为零。

凭什么。全靠平方反比：场强按 $1/r^2$ 衰减，而同一立体角张开的面积按 r^2 增长，两者恰好抵消——所以面离得多远、形状多怪都不影响，通量只管数源的多少。换个幂次就不成立了。

有什么用。一旦有对称性，左端能直接写成 $4\pi r^2 E(r)$ 这种简单形式，一步解出 E。下面球壳、球体，以及静电的直线、平面，用的全是这一招。

证. 对点源，$\vec{E}_{G,m} = -\dfrac{Gm}{r^2}\hat{r}$，

$$\oiint_S \vec{E}_{G,m}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -Gm\oiint_S \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2}.$$



立体角元

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}S^*}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\tilde{S}}{\tilde{r}^2}$$

无量纲，作相似变换（把锥底搬到半径 $\tilde{r}$ 的小球面上）后

$$\oiint \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \oiint_{\text{球面}} \frac{\mathrm{d}\tilde{S}}{\tilde{r}^2} = \frac{4\pi\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2} = 4\pi \quad (O \text{ 位于 } S \text{ 之内}), \qquad = 0 \quad (O \text{ 位于 } S \text{ 之外}).$$

故

$$\oiint_S \vec{E}_{G,m}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \begin{cases} -4\pi G m, & m \text{ 位于 } S \text{ 之内}, \\ 0, & m \text{ 位于 } S \text{ 之外}, \end{cases}$$

即外部的源在面内的场强贡献互相抵消。一般情形由 $\vec{E}_G = \sum_i \vec{E}_{G_i}$ 叠加，

$$\oiint_S \vec{E}_G\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G\sum_{S\text{内}} m_i \implies -4\pi G \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V. \qquad \blacksquare$$

立体角是平面角的三维版：平面角 = 弧长 / 半径，立体角 = 面积 / 半径 ^{2}。从 O 望出去，一片面元张开多大立体角，看的是它*垂直于视线的投影*面积除以距离平方——点乘 $\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}$ 做的正是这个投影（面元越斜，挡住的视线越少）。

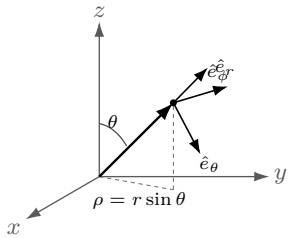
为什么能「搬」。同一个细锥，截在距离 r 处得 $\mathrm{d}S^*$、截在 $\tilde{r}$ 处得 $\mathrm{d}\tilde{S}$；两个截面相似、面积之比为 $(\tilde{r}/r)^2$，故两个商相等。立体角只由锥张开的程度决定，与截在多远处无关——这就是「无量纲」的含义，也是把锥底搬到小球面上的依据。

这一步正好吃掉 $1/r^2$。点源场强 $\propto 1/r^2$，于是通量元 $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \propto \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \mathrm{d}\Omega$，$r$ 完全消失；总通量只取决于闭合面对 O 张开的总立体角。

4π 与 0 的来历。O 在面内时，诸锥把小球面恰好铺满一遍，总立体角 $= 4\pi\tilde{r}^2/\tilde{r}^2 = 4\pi$。$O$ 在面外时，自 O 射出的射线若穿过 S *必穿两次*：同一个锥切出的两片，一片法向朝外（$\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r} > 0$）、一片朝内（$< 0$），等大反号、逐对抵消。

收尾。多源时通量对 $\vec{E}$ 是线性的，各点源的通量直接相加：面外的各自为零，只剩面内的，得 $-4\pi G\sum_{S\text{内}} m_i$；连续分布再把求和换成体积分。

2.2.2.2 球坐标



$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi,$$

$$r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta \times r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_r,$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\;(\Rightarrow \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) = r^2\,\mathrm{d}r\underbrace{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\Omega},$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi, \qquad \Omega_{\text{total}} = \int_0^{\pi}\sin\theta\;\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 4\pi.$$

$\mathrm{d}V$ **从哪来。**让三个坐标各增加一点，得到一个小砖块，它的三条棱是互相垂直的位移：r 增 $\mathrm{d}r$ 走 $\mathrm{d}r$；θ 增 $\mathrm{d}\theta$ 沿经线走弧长 $r\,\mathrm{d}\theta$；ϕ 增 $\mathrm{d}\phi$ 沿纬线走弧长 $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$（纬线圆半径是 $\rho = r\sin\theta$，不是 r）。这三条正是上一行 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的三个分量。三棱两两垂直，体积即三者相乘。

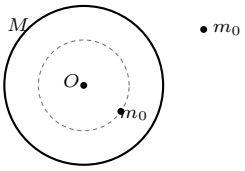
$\mathrm{d}\vec{S}$ **也在上一行。**两条切向棱的叉乘 = 面积 × 法向，故朝外那一面 $\mathrm{d}\vec{S} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{r}$。代进立体角的定义：

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{r^2} = \sin\theta\;\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

r^2 约掉了——正印证上一条说的「立体角与距离无关」。

那个花括号。把 $\mathrm{d}V$ 写成 $r^2\,\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\Omega$ ，即「径向厚度 × 立体角」。后面球对称分布的 $M(r)=\int\rho\,4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$ 里那个 4π ，就是角向部分先积掉的结果。

4π **怎么算出来。** $\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=[-\cos\theta]_0^{\pi}=2$ ，乘上 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=2\pi$ ，得 4π。注意 θ 只到 π （北极到南极）、ϕ 才到 2π ，弄反就成 8π 了。至于为什么带 $\sin\theta$ 而不是 1：纬线圈在赤道最大、到极点缩成一点， $\sin\theta$ 正是这个收缩因子。



例 (均匀质量球壳 (M,R))

由对称性 $\vec{E}_G(\vec{r})=E_G(r)\,\hat{r}$ ；取半径 r 的球面为 Gauss 面 S ，

$$\oiint_S\vec{E}_G\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S E_G(r)\,\mathrm{d}S=4\pi r^2E_G(r)\overset{\text{Gauss}}{=}\begin{cases}-4\pi GM, & r>R,\\ 0, & r<R,\end{cases}$$

$$\vec{E}_G(\vec{r})=\begin{cases}-\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}, & r>R,\\ \vec{0}, & r<R.\end{cases}$$

例 (均匀质量球体 (M,R)) $\vec{E}_G(\vec{r})=E_G(r)\,\hat{r}$ ，

$$\oiint_{\text{球面}r}\vec{E}_G\cdot\mathrm{d}\vec{S}=4\pi r^2E_G(r)\overset{\text{Gauss}}{=}\begin{cases}-4\pi GM, & r>R,\\ -4\pi GM\dfrac{r^3}{R^3}, & r<R,\end{cases}$$

$$\vec{E}_G=\begin{cases}-\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}, & r>R,\\ -\dfrac{GM}{R^3}\vec{r}, & r<R.\end{cases}$$

对一般的**球对称质量分布** $\rho=\rho(r)$ ，仍有 $\vec{E}_G=E_G(r)\,\hat{r}$ ，

$$\oiint_{\text{球面}r}\vec{E}_G\cdot\mathrm{d}\vec{S}=4\pi r^2E_G(r)\longrightarrow-4\pi GM(r),\qquad M(r)=\int_0^r\rho(r')\,4\pi r'^2\,\mathrm{d}r',$$

$$\vec{E}_G(\vec{r})=-\frac{GM(r)}{r^2}\,\hat{r},$$

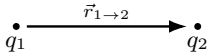
即等价于在球心放一个质点，其质量为高斯面内的总质量 $M(r)$。

2.2.3 静电力

$$1\ \mathrm{C}=\frac{10^{19}}{1.602176634}\,e\qquad(\ e:\ \text{元电荷}).$$

Coulomb 定律

$$\vec{F}_{1\to2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{1\to2},$$



$$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.99\times10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2},\qquad\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$$

（ ε_0 为**真空介电常量**，又称**电容率**）。

2.2.3.1 静电场强及叠加原理

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0},\qquad \text{点源}q:\ \vec{E}_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r},$$

$$\mathrm{d}q=\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3\vec{r}',\qquad \vec{E}_q(\vec{r})=\iiint\frac{\rho(\vec{r}')\,\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'.$$

Gauss 定理（证明与引力情形逐字相同，只把 $-Gm$ 换成 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ ）：

$$\oiint_S\vec{E}_q\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\frac{\mathrm{d}\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2}=\begin{cases}\dfrac{q}{\varepsilon_0}, & q\text{ 位于 }S\text{ 内},\\ 0, & q\text{ 位于 }S\text{ 外},\end{cases}$$

$$\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}}q_i\implies\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\,\mathrm{d}V.$$

均匀带电球 (Q,R)**.** $\vec{E}(\vec{r})=E(r)\,\hat{r}$ ，

$$\oiint_{\text{球面}r}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=4\pi r^2E(r)\xrightarrow{\text{Gauss}}\begin{cases}\dfrac{Q}{\varepsilon_0}, & r>R,\\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\dfrac{r^3}{R^3}=\dfrac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho r^3, & r<R,\end{cases}$$

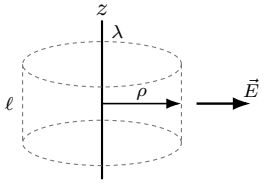
> 高斯定理右端是*高斯面内包住的*电量，不是总电量——面取在球内时只有一部分电荷被包住，这就是这一支与 $r>R$ 那支的全部差别。
>
> r^3/R^3 **从哪来。**电荷均匀，故「包住的电量」与「包住的体积」成正比：
>
> $$q_{\text{内}}=Q\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=Q\,\frac{r^3}{R^3},$$
>
> 再除以 ε_0 就是通量。
>
> **第二个写法只是换了变量。**用电荷密度直接写 $q_{\text{内}}=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ ，便得 $\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho r^3$。两式是同一个量，代 $Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ 即可互换；下一行解出的 $\vec{E}$ 也给了 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^3}\vec{r}$ 与 $\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ 两种形式，正与此一一对应。
>
> **为什么内部是线性场。**左端 $4\pi r^2E$ 的 r^2 与右端的 r^3 一约，只剩一次方：$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$。对照球壳的 $r<R$ 支是 0 （里面根本没有电荷），实心球则随 r 线性增长，到 $r=R$ 两支接上。

$$\vec{E}(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\hat{r}, & r>R,\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^3}\vec{r}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}, & r<R,\end{cases}$$

后者是**内部线性场**。

> λ 是**线电荷密度**：单位长度上的电量，$\lambda=\mathrm{d}q/\mathrm{d}\ell$ ，单位 C/m。故长 ℓ 的一截带电 $\lambda\ell$ ——与「密度 × 体积 = 质量」同理。
>
> 本节三种分布各用一种密度，对照着记：体分布用 $\rho=\mathrm{d}q/\mathrm{d}V$ （乘体积）、面分布用 $\sigma=\mathrm{d}q/\mathrm{d}S$ （乘面积）、线分布用 $\lambda=\mathrm{d}q/\mathrm{d}\ell$ （乘长度）。

无穷长均匀带电直线（ $\lambda=\mathrm{d}q/\mathrm{d}\ell$ ）.



由对称性 $\vec{E}=E(\rho)\,\hat{\rho}$，上下底面无通量、只有侧面有贡献：

$$\oiint_{\text{柱面}S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{\text{侧面}}E(\rho)\,\mathrm{d}S=2\pi\rho\ell\,E(\rho)\xrightarrow{\text{Gauss}}\frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0},$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\hat{\rho}\ \sim\ \frac{1}{\rho}\qquad\Big(\text{量纲}[\lambda]=\tfrac{[Q]}{L}\Big).$$

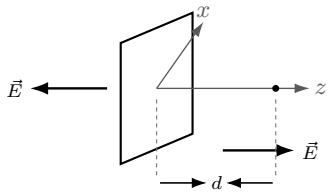
为什么取圆柱面。无限长均匀带电直线有两条对称性：绕轴转任意角不变、沿轴平移任意距离不变。于是场强只能依赖到轴的距离 ρ、方向只能沿 $\hat{\rho}$（若有轴向分量，沿轴翻转就矛盾；若有切向分量，镜面反射就矛盾）。取同轴、半径 ρ、长 ℓ 的圆柱面，它每一处「看起来都一样」。

左端。上下底面的法向沿轴、与 $\vec{E}$ 垂直，$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，无通量；侧面上 $\vec{E}$ 处处与法向同向、大小又都是 $E(\rho)$，故通量 $=E(\rho)\times$ 侧面积 $=E(\rho)\cdot2\pi\rho\ell$（周长 × 高）。

右端：「面内」是哪儿。高斯面是我们*自己画的一个假想闭合曲面*——这里就是套在带电直线上的一段圆柱，连上下两个底盖、封闭成一个「袋子」。右端要的是这个袋子*装住了*多少电荷：直线无限长，但袋子只有 ℓ 长，故只有被套住的那一截算数，袋外那两截不算（它们的场线穿进来又穿出去，净通量为零）。那一截的电量即 $q_{\text{内}}=\lambda\ell$，再除以 ε_0。

解出来后 ℓ 约掉了，这是必须的——高斯面取多长是我们自己定的，结果不该依赖它，可拿来自检。另注意衰减是 $1/\rho$ 而非 $1/\rho^2$：点源的场线往三维散开（球面积 $\propto r^2$），线源只能往垂直于线的二维散开（柱侧面积 $\propto\rho$），所以摊薄得慢一档。末尾的量纲式 $[\lambda]=[Q]/L$ 同样是自检：$\frac{\lambda}{\varepsilon_0\rho}$ 与点电荷的 $\frac{q}{\varepsilon_0 r^2}$ 量纲一致。

无穷大均匀带电平面（$\sigma=\mathrm{d}q/\mathrm{d}S$）.

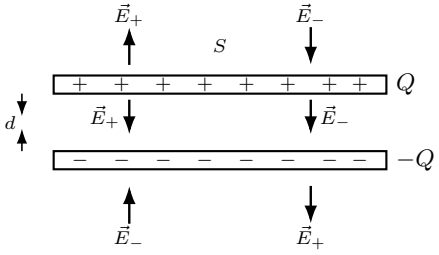


取贯穿平面的闭合柱面为 Gauss 面（侧面无通量）：

$$\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=2E(d)\cdot\Delta S\longrightarrow\frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0},\qquad E(d)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\qquad\vec{E}=E(d)\,\hat{z},$$

结果不含 d——平面两侧都是均匀强场。

平行板电容器.



$d\ll\sqrt{S}\Longrightarrow$ 边缘效应可略。记 $\sigma=Q/S$。两板的场在板间叠加、在板外抵消：

$$E_{\text{外}}=0,\qquad E_{\text{内}}=2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0},\qquad\Delta U=E_{\text{内}}\cdot d=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0},$$

两个 2 来路完全不同，只是数值上恰好约掉。

分母的 2：单板向两侧各送一半。一块无限大带电平面把通量*同时*送往两侧，故高斯面有*两个*底面：$2E\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$，解得单板场强 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$——这个 2 是「两个底面」的 2。

分子的 2：两块板在板间同向叠加。看上图，板间 $\vec{E}_+$ 向下、$\vec{E}_-$ 也向下，故相加 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=2\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$；板外两者反向、相减为零，这就是 $E_{\text{外}}=0$。

自检。若只有一块板，答案该是 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$；现在是它的*两倍* $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，正说明两块板都算上了。

$$\text{电容}\quad C=\frac{Q}{\Delta U}=\varepsilon_0\frac{S}{d}=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}$$

（若填入介质，ε_0 换成介质的介电常量）。最大耐压 ΔU_m 对应 $Q_m=C\,\Delta U_m$，高于此值介质易被击穿；空气的击穿场强 $E_{\text{击穿}}\approx 3\times10^4\ \mathrm{V/cm}$（约三万伏每厘米）。

Gauss 定理的微分式. 由

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V \implies \iiint_V \left(\operatorname{div}\vec{E}\right)\mathrm{d}V$$

这一步用的是**高斯公式**（散度定理）——一条纯数学恒等式，对任何矢量场、任何闭合面都成立：

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\mathrm{d}V.$$

它只把左端的面积分换写成体积分，不含任何物理。

两个「高斯」撞名了。上式是高斯公式（数学，恒成立）；而 $\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q_{\text{内}}/\varepsilon_0$ 是高斯定理（物理，只对平方反比场成立）。这一行正是把两者并置：左端用数学公式换形式，右端放物理内容。

再走一步才到微分式。两端现在都是同一个 V 上的体积分，而 V 是任取的——可以取得无穷小、放在任何位置。若两个体积分对一切区域都相等，被积函数就必须处处相等（否则围住差异处取一小块，积分便不等了），于是 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$。这就是笔记旁注「局域」的意思：从整体的积分形式走到了逐点的微分形式。

散度在说什么。$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ 在一点的值是「从该点无穷小体积净流出的通量 ÷ 体积」，即源的强度密度。所以微分式说的是：电场在哪儿冒出来，那儿就有电荷；$\rho=0$ 处场线既不生也不灭。

得**静电场的 Maxwell 方程**（局域形式）

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=0,\qquad \oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=0\quad(\forall L).$$

三个式子其实是两件事：第一式管**散度**（场从哪儿冒出来），后两式管**旋度**（场有没有打旋）。矢量场由散度与旋度共同定下，故两条缺一不可。

后两式是同一件事的两种写法，靠 Stokes 公式（又一条纯数学恒等式）联系：

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}\qquad(S\text{ 以 }L\text{ 为边界}).$$

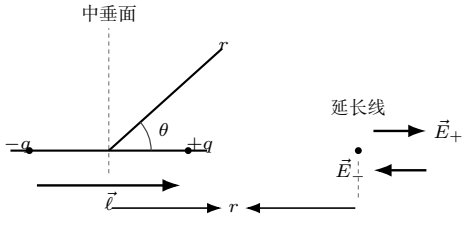
旋度处处为零 ⇒ 任何回路的环流为零；反过来，对一切回路都为零、取无穷小回路即得旋度为零——这就是「$\forall L$」的用处，与上一条从积分式走到微分式是同一个逻辑。

凭什么旋度是零。点电荷的场是径向的、只依赖 r（$\vec{E}=f(r)\hat{r}$），这种场必是某个标量的梯度，而梯度的旋度恒为零；旋度又是线性运算，叠加不破坏它。

物理含义就是电势。$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=0$ 即单位电荷沿任何闭合路径绕一圈做的净功为零，等价于 $A\to B$ 的功与路径无关。于是可定义只依赖位置的**电势** φ，使 $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$——与力学里「保守力 ⇒ 存在势能」（§2.1.1 的 $\vec{F}=-\partial V/\partial\vec{r}$）完全同理。但「静」字要紧：一旦磁场随时间变，就有 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t\neq 0$，环流不再为零，电势也不能这么定义了。

2.2.3.2 电偶极子

两个相距很近的等量异号点电荷（$r\gg\ell$）。



按多极展开 $\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}^{(0)}+\vec{E}^{(1)}+\cdots$，其中 $\vec{E}^{(0)}=0$（总电量为 0）。由

$$r_\pm^2=\Big(r\mp\frac{\ell}{2}\Big)^2=r^2\Big(1\mp\frac{\ell}{2r}\Big)^2=r^2\Big(1\mp\frac{\ell}{r}+\cdots\Big),$$

$$E_\pm=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\big(r\mp\frac{\ell}{2}\big)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Big(1\pm\frac{\ell}{r}+\cdots\Big).$$

延长线上（$\theta=0$）：

$$E=E_+-E_-=\frac{2q\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\cdots$$

为什么非展开不可。两个电荷等量异号，远处它们的场几乎抵消——把它们当作一个总电量 $q+(-q)=0$ 的点电荷，得到的正是 $\vec{E}^{(0)}=0$。$1/r^2$ 那一阶正好相消，所以必须把每个电荷的场按小量 ℓ/r 展开，看抵消之后还剩什么。

$r_\pm$ 的来历。r 是从偶极子中点量起的，故场点到两电荷的距离各差 $\ell/2$：近的 $+q$ 是 $r-\frac{\ell}{2}$、远的 $-q$ 是 $r+\frac{\ell}{2}$，即 $r_\pm=r\mp\frac{\ell}{2}$。

两次展开。先平方：提出 r^2 后用 $(1-x)^2\approx1-2x$（这里 $x=\frac{\ell}{2r}$，故 $2x=\frac{\ell}{r}$）；再取倒数：$(1-x)^{-1}\approx1+x$，负号翻成正号——这就是 $r_\pm^2$ 里写 $\mp$ 而 $E_\pm$ 里变成 $\pm$ 的原因。

延长线上为何相减。场点与两电荷共线；$+q$ 的场指向外、$-q$ 的场指向它自己，在场点处方向相反，故取差：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Big[\Big(1+\frac{\ell}{r}\Big)-\Big(1-\frac{\ell}{r}\Big)\Big]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{2\ell}{r}.$$

零阶的 1 相消（这就是 $\vec{E}^{(0)}=0$ 的具体样子），一阶项相加，衰减降一档成 $1/r^3$。

中垂面上（$\theta=\frac{\pi}{2}$）：$E_\pm=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\big(r^2+\frac{\ell^2}{4}\big)}$，取两者的 $\vec{\ell}$ 方向分量相加，

$$E=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\big(r^2+\frac{\ell^2}{4}\big)}\cdot\frac{\frac{\ell}{2}}{\big(r^2+\frac{\ell^2}{4}\big)^{1/2}}=\frac{q\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\cdots$$

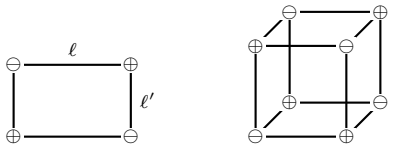
为什么 $r_\pm^2=r^2+\frac{\ell^2}{4}$。场点在中垂面上，到两电荷等距：直角三角形的两条直角边是 r 与 $\frac{\ell}{2}$。既然等距，两个场的大小相等。

但方向不同，要先分解。把 $\vec{E}_\pm$ 各分成「沿 $\vec{\ell}$」与「垂直于 $\vec{\ell}$」两份：垂直的那份大小相等、方向相反，抵消；沿 $\vec{\ell}$ 的那份大小相等、方向又相同（都指向 $-q$ 一侧），相加。故 $E=2E_+\cos\theta'$。

式中那串分式就是 $\cos\theta'$。还是同一个直角三角形：邻边 $\frac{\ell}{2}$、斜边 $\big(r^2+\frac{\ell^2}{4}\big)^{1/2}$，故 $\cos\theta'=\dfrac{\ell/2}{(r^2+\ell^2/4)^{1/2}}$。代入整理得 $\frac{q\ell}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\ell^2/4)^{3/2}}$，再用 $r\gg\ell$ 丢掉 $\ell^2/4$。

对照一下。延长线上的结果恰是中垂面上的两倍，而方向相反（一个沿 $\vec{p}$、一个沿 $-\vec{p}$）。

定义**电偶极矩** $\vec{p}=q\vec{\ell}$。



更高阶的中性构型衰减更快。远场（$\ell,\ell'\ll r$）下，上图左边的四电荷构型给**电四极矩**，右边的立方体构型再高一阶：

$$E\sim\frac{q\ell\ell'}{\varepsilon_0 r^4},\qquad E\sim\frac{q\ell^3}{r^5}\qquad(\text{例：}\mathrm{Na^+Cl^-}).$$

2.2.4 磁场力与磁场

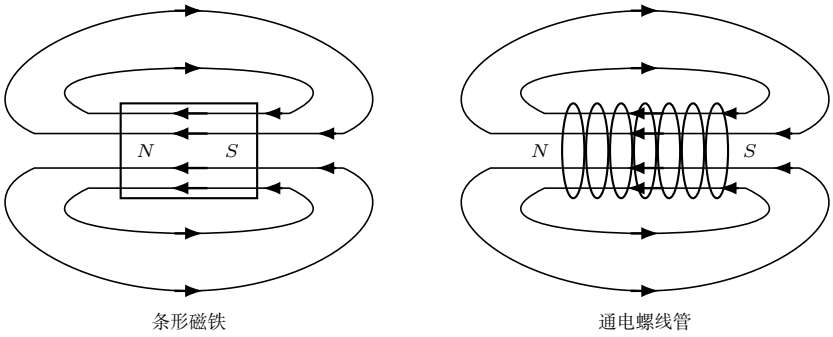
运动电荷在电磁场中受力

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}\qquad(\textbf{Lorentz 公式}),$$

其中 $\vec{B}$ 称为**磁感应强度**。

经典电子论. J. J. Thomson 1897 $\Longrightarrow$ 发现电子。

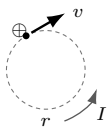
Oersted 实验：电生磁. 条形磁铁外部的磁感线分布，与通电螺线管外部的完全一样——这启发了**分子环流假说**：磁铁的磁性来自其内部微观的环形电流。



条形磁铁　　通电螺线管

把一个电荷 e 沿半径 r 的圆周以速率 v 环行看作一个环流，其周期 $T=2\pi r/v$ ，等效电流

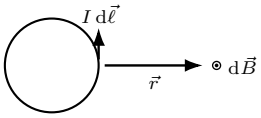
$$I=\frac{e}{2\pi r/v}=\frac{ev}{2\pi r}.$$



Ampere ： 磁的电本原. 一切磁现象都源于电流 $\Longrightarrow$「**电动力学**」。与之相对，**磁单极子**不存在——磁感线永远闭合，没有「磁荷」可作为起点或终点。

2.2.4.1 Biot–Savart–Laplace 定律

恒定电流线圈上的电流元 $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$ 在场点激发的磁场为

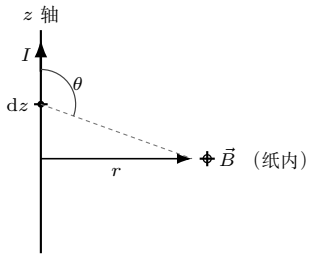


$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},$$

其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ 称为**真空磁导率**。它与 ε_0 的关系给出光速：

$$\frac{1}{\varepsilon_0}=4\pi k,\qquad c^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{4\pi\times9\times10^9}{4\pi\times10^{-7}}=9\times10^{16}\ \mathrm{m^2/s^2}.$$

例：无限长直导线.



取导线上 z 处的电流元，它到场点的连线与电流方向成角 θ ，场点到导线的垂距为 r ：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}z\sin\theta}{r^2+z^2}.$$

作换元 $z=-r\cot\theta$ （ $z:-\infty\to+\infty$ 对应 $\theta:0\to\pi$ ），则

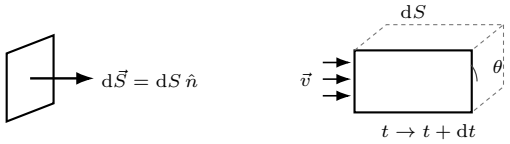
$$\mathrm{d}z=\frac{r}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\qquad r^2+z^2=\frac{r^2}{\sin^2\theta},$$

两者代入后 r 的幂次与 $\sin\theta$ 大量约去：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\qquad\Longrightarrow\qquad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

2.2.4.2 电流密度与连续性方程

设载流子电荷密度为 ρ、定向移动速度为 $\vec{v}$。对任意面元 $\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\,\hat{n}$ ，在 $t\to t+\mathrm{d}t$ 内穿过它的载流子填满一个斜柱体：



$$\mathrm{d}V=v\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}S\cos\theta=\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\rho=\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=j\,\mathrm{d}S_{\perp},$$

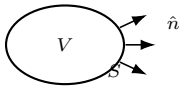
其中

$$\vec{j}=\rho\vec{v}\quad\text{称为}\textbf{电流密度},\qquad I=\iint\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

q 为载流子电荷。正负两种载流子同时存在时

$$\vec{j}=n_+q\vec{v}_+-n_-q\vec{v}_-.$$

连续性方程. 对空间中固定的区域 V （边界闭合面 S ，面元取外法向），单位时间净流出的电量等于区域内电量的减少：



$$\oiint_S\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V\rho\,\mathrm{d}V=-\iiint_V\partial_t\rho\,\mathrm{d}V\qquad\Longrightarrow\qquad\oiint_S\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iiint_V\partial_t\rho\,\mathrm{d}V=0.$$

用 Gauss 公式把面积分化为体积分，

$$\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}V+\iiint_V\partial_t\rho\,\mathrm{d}V=0,$$

因区域 V 任取，得**连续性方程**（微分形式）

$$\partial_t\rho+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0,\qquad\vec{j}=\rho\vec{v}.$$

质量守恒的同构. 同一套推理换成质量即可。由 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ ，引入质量密度 ρ_m 得

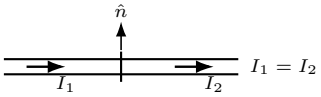
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho_m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{j}_m\cdot\mathrm{d}\vec{S},\qquad\oiint_S\vec{j}_m\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\iiint\partial_t\rho_m\,\mathrm{d}V,$$

$$\partial_t\rho_m+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m=0.$$

电流场与恒定电流条件. 一般的**电流场** $\vec{j}=\vec{j}(\vec{r},t)$。**恒定电流场**指电流与电荷分布都不随时间变化：

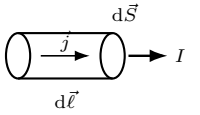
$$\partial_t\vec{j}=0,\qquad \partial_t\rho=0\qquad\Longrightarrow\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0\iff \oiint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0,$$

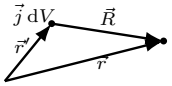
即电流沿导线处处连续（同一根导线上 I 取同一值）。



2.2.4.3 体电流元与运动点电荷

把线电流的 $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$ 换成体分布：取一小段导体，截面 $\mathrm{d}\vec{S}$、轴向 $\mathrm{d}\vec{\ell}$，则





$$I\,\mathrm{d}\vec{\ell}=j\;\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\mathrm{d}V\,\vec{j}\qquad(\textbf{体电流元}),$$

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times\hat{R}}{R^2}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'\qquad(\textbf{一般形式},\ \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'\ ).$$

线电流模型把导线当成没有粗细的线；真实电流摊在截面上。取截面 $\mathrm{d}\vec{S}\perp\vec{j}$，则 $I=\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=j\;\mathrm{d}S$；而 $\mathrm{d}\vec{\ell}$ 与 $\vec{j}$ 同沿轴向，故

$$I\,\mathrm{d}\vec{\ell}=(j\;\mathrm{d}S)\,(\mathrm{d}\ell\,\hat{\ell})=(j\,\hat{\ell})\,(\mathrm{d}S\;\mathrm{d}\ell)=\vec{j}\;\mathrm{d}V.$$

方向信息从 $\mathrm{d}\vec{\ell}$ 转交给了 $\vec{j}$，标量 I 则换成标量 $\mathrm{d}V$。代回 Biot–Savart 式，沿导线的线积分 $\int_L$ 就变成对源区的体积分，$\mathrm{d}^3\vec{r}'=\mathrm{d}V$。其中 $\vec{r}'$ 跑遍所有源点，$\vec{r}$ 是固定的场点，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ 由源指向场。

运动点电荷的磁场. 由 $\vec{j}=\rho\vec{v}$ 得 $\vec{j}\,\mathrm{d}V=\mathrm{d}q\,\vec{v}$，代入上式得

$$\vec{B}\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}.$$

这只是近似：运动点电荷并非恒定电流（$\partial_t\rho\neq0$）。v 不远小于 c 时还须乘上因子

$$\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}.$$

磁力与电力之比. 两个运动电荷 q_1（速度 $\vec{v}_1$）与 q_2（速度 $\vec{v}_2$），q_2 受 q_1 的磁场力为 $q_2\vec{v}_2\times\vec{B}_{1\to2}$。量级上

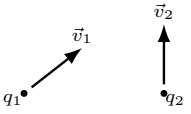
$$F_e\sim\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2},\qquad F_m\sim\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2v_1v_2}{r_{12}^2},$$

$$\frac{F_m}{F_e}\sim\varepsilon_0\mu_0v_1v_2=\frac{v_1v_2}{c^2}.$$

F_m 是把上面两式接起来。先用刚得到的运动点电荷磁场，q_1 在 q_2 处激发

$$B_{1\to2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1v_1\sin\theta}{r_{12}^2}\sim\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1v_1}{r_{12}^2};$$

再用 Lorentz 力 $F_m=q_2v_2B_{1\to2}\sin\theta'\sim q_2v_2B_{1\to2}$，代入即得。两处 $\sim$ 都是丢掉叉乘的角因子（≤1）——这里只比量级。相除时 $\dfrac{\mu_0/4\pi}{1/4\pi\varepsilon_0}=\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$，故 $F_m/F_e\sim v_1v_2/c^2$：低速下磁力远弱于电力，它本质上是电力的相对论效应。



2.2.4.4 磁 Gauss 定理

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \iff \oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0.$$

证. 先备两条恒等式。记 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ ， $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ ，则 $\partial_x R=-\partial_{x'}R$ ，故

$$\vec{\nabla}\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3},\qquad \vec{\nabla}'\frac{1}{R}=+\frac{\vec{R}}{R^3};$$

又有

$$\vec{\nabla}\times(U\vec{E})=\vec{\nabla}U\times\vec{E}+U\,\vec{\nabla}\times\vec{E}.$$

第一条. R 只通过 $\vec{r}-\vec{r}'$ 依赖坐标，所以对带撇变量求导必然反号： $\partial_{x'}=-\partial_x$ ，即作用在 R 的任何函数上都有 $\vec{\nabla}'=-\vec{\nabla}$。具体算：

$$\partial_x R=\frac{x-x'}{R}\implies \vec{\nabla}R=\frac{\vec{R}}{R}=\hat{R},\qquad \partial_x\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\partial_x R$$

（后式是链式法则），故 $\vec{\nabla}\frac{1}{R}=-\hat{R}/R^2=-\vec{R}/R^3$ ；带撇的只差一个负号。

第二条. 就是 Leibniz 法则——$\vec{\nabla}$ 是微分算符，碰到乘积要分别作用到两个因子上。看 x 分量：

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla}\times(U\vec{E})]_x&=\partial_y(UE_z)-\partial_z(UE_y)\\&=\underbrace{(\partial_y U)E_z-(\partial_z U)E_y}_{(\vec{\nabla}U\times\vec{E})_x}+U\underbrace{(\partial_y E_z-\partial_z E_y)}_{(\vec{\nabla}\times\vec{E})_x},\end{aligned}$$

y,z 分量同理。

用处. 第一条把 $\hat{R}/R^2$ 写成一个梯度；第二条取 $U=1/R$、$\vec{E}=\vec{j}(\vec{r}')$ ，由于 $\vec{j}$ 只依赖源点、与场点 $\vec{r}$ 无关，$\vec{\nabla}\times\vec{j}=0$ ，于是

$$\vec{j}\times\left(-\vec{\nabla}\tfrac{1}{R}\right)\overset{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}{=}\vec{\nabla}\tfrac{1}{R}\times\vec{j}\overset{\text{第二条}}{=}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{j}}{R}.$$

积分号里就凑出了 $\vec{\nabla}\times$ ，可以提到积分外面，得 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$。

把 $\hat{R}/R^2=\vec{R}/R^3=-\vec{\nabla}\frac{1}{R}$ 代入体电流的 Biot–Savart 式：

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{j}(\vec{r}')\times\left(-\vec{\nabla}\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}),\qquad \vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'$$

（ $\vec{A}$ 称为**磁矢势**）。于是

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\begin{vmatrix}\partial_x&\partial_x&A_x\\\partial_y&\partial_y&A_y\\\partial_z&\partial_z&A_z\end{vmatrix}=0,$$

因行列式有两列相同。同理

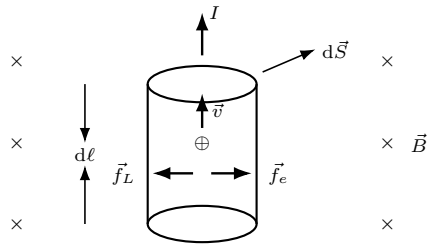
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U=\begin{vmatrix}\hat{x}&\partial_x&\partial_x U\\\hat{y}&\partial_y&\partial_y U\\\hat{z}&\partial_z&\partial_z U\end{vmatrix}=0.\qquad\blacksquare$$

2.2.4.5 安培力

安培力（ Ampere 力）是电流元在磁场中受的力：

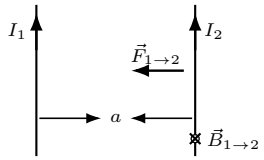
$$\mathrm{d}\vec{F}_A=I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\times\vec{B}\longrightarrow\vec{j}\,\mathrm{d}V\times\vec{B}.$$

它的本质是洛伦兹力的「诱导力」：外磁场把导体内的载流子横向推偏，积累的电荷建立起横向的 **Hall 电场**，电场力 $\vec{f}_e$ 与洛伦兹力 $\vec{f}_L$ 对载流子平衡；而 $\vec{f}_e$ 的反作用力作用在导线骨架上，其大小方向与 $\vec{f}_L$ 相同，逐个载流子求和即得安培力：



$$\mathrm{d}\vec{F}_A = \sum_{\mathrm{d}V} \vec{f}_e = \sum_{\mathrm{d}V} \mathrm{d}\vec{f}_L = nq\ \mathrm{d}V\, \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j}\ \mathrm{d}V \times \vec{B}.$$

两平行载流导线. 电流同向相吸、异向相斥。



导线 1 在导线 2 处的磁场为 $B_{12} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ （方向垂直纸面向内），故导线 2 单位长度受力

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = I \cdot B_{12} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}.$$

> B_{12} 直接套用前面「无限长直导线」的结果 $B = \mu_0 I/(2\pi r)$，把垂距 r 换成两线间距 a 即可；方向由右手定则——拇指沿 I_1 向上、四指环绕，在导线 1 的右侧（导线 2 所在处）磁感线指向纸内。
>
> 受力用安培力 $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}_{12}$。$\mathrm{d}\vec{\ell}$ 沿导线 2 向上、$\vec{B}_{12}$ 垂直纸面向内，两者正交，$\sin 90^\circ = 1$，故 $\mathrm{d}F = I\ \mathrm{d}\ell\, B_{12}$，两边除以 $\mathrm{d}\ell$ 即得（此处设两线电流相等，同记作 I）。取 $\hat{x}$ 向右、$\hat{y}$ 向上、$\hat{z}$ 出纸面，则 $\hat{y} \times (-\hat{z}) = -\hat{x}$ 指向导线 1，故同向电流相吸。

取 $I = 1$ A、$a = 1$ m、$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2，得 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = 2 \times 10^{-7}$ N/m ——这正是**安培**的定义。相应地 $B = 2 \times 10^{-7}$ T （**特斯拉**）。

单位换算 1 T $= 10^4$ Gs （**高斯**）；作为量级参照，磁铁约 200 Gs，地磁场约 0.5 Gs。

2.3 惯性力

2.3.1 引入

惯性系 S 中

$$\vec{F}_{\text{真}} = m\vec{a}.$$

非惯性系 S' 中 $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{\text{牵}}$，于是

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{\text{牵}} = \vec{F}_{\text{真}} - m\vec{a}_{\text{牵}}.$$

引入表观力 $\vec{F}' = m\vec{a}'$ 以在形式上恢复牛顿第二定律，则

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\text{真}} + \vec{F}_{\text{惯}}, \qquad \vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_{\text{牵}}.$$

$\vec{F}_{\text{惯}}$ 称为**惯性力**，是一种虚拟力——没有施力物，不满足牛顿第三定律。

引入惯性力的好处：

1. **符合测量直观**。
2. **形式上类牛顿第二定律**，可在数学形式上得到非惯性系中的「能量」定理——若 $\vec{F}_{\text{惯}}$ 保守，则机械能守恒。

两点都是为了省事。①测量总是在非惯性系里做的（人就站在车上），而经验与直觉来自惯性系。刹车时乘客感到被往前推，把这份感觉直接当成一个力 $-m\vec{a}_0$，就能就地算出摆的偏角 $\tan\theta = a_0/g$，不必换回地面系去做矢量相加。

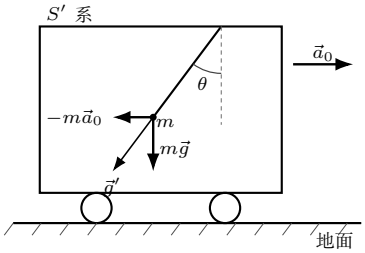
②补上 $\vec{F}_{惯}$ 之后，$\vec{F}' = m\vec{a}'$ 与牛顿第二定律*同形*，于是动量、能量、角动量三个定理的推导可以整套照搬——代价是牛顿第三定律不再成立（$\vec{F}_{惯}$ 没有反作用力）。特别地，若 $\vec{F}_{惯}$ 保守（如匀角速转动系的离心力，势能 $-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$），机械能守恒仍然可用。

2.3.2 平动惯性力

平动非惯性系 S' 需引入的惯性力称为**平动惯性力**，记为 $\vec{F}_i$：

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{O'对S}.$$

例. 地面附近的匀加速非惯性系 S'（加速度 $\vec{a}_0 = \vec{a}_{O'对S}$ 为常矢量）中，表观力

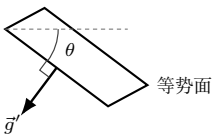


$$\vec{F}' = m\vec{g} - m\vec{a}_0 = m\vec{g}', \qquad \vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0,$$

$\vec{g}'$ 称为**类重力加速度**。「平衡」位置满足

$$\tan\theta = \frac{a_0}{g},$$

等势面（即类重力场中的「水平面」）与 $\vec{g}'$ 垂直：



小角度摆动

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

孤立两体. 例：日–地、氢原子 (e,p)。



S 系中

$$\vec{F}_A = m_A\vec{a}_A, \qquad \vec{F}_B = m_B\vec{a}_B, \qquad \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0.$$

A 系中考查 B 的运动：

$$m_B\vec{a}_{B对A} = \vec{F}_B + m_B(-\vec{a}_A) = \vec{F}_B + m_B\frac{\vec{F}_B}{m_A} = \frac{m_A + m_B}{m_A}\vec{F}_B,$$

三步。**一、**A 系是非惯性系（ A 自己有加速度 $\vec{a}_A$ ），所以给 B 写方程必须补上平动惯性力 $-m_B\vec{a}_A$ ：

$$m_B\vec{a}_{B\text{对}A}=\underbrace{\vec{F}_B}_{\text{真实力}}+\underbrace{(-m_B\vec{a}_A)}_{\text{惯性力}},$$

这正是 §2.3.1 的 $m\vec{a}'=\vec{F}_{\text{真}}+\vec{F}_{\text{惯}}$。**二、**把 $\vec{a}_A$ 换掉：牛顿第三定律给 $\vec{F}_A=-\vec{F}_B$ ，牛顿第二定律给 $\vec{a}_A=\vec{F}_A/m_A$ ，故 $-m_B\vec{a}_A=+\dfrac{m_B}{m_A}\vec{F}_B$。**三、**合并系数， $1+\dfrac{m_B}{m_A}=\dfrac{m_A+m_B}{m_A}$ ；反解即得 $\vec{F}_B=\mu\,\vec{a}_{B\text{对}A}$ ——力一点没变，只是质量从 m_B 换成了 μ ，两体问题就化成了单体问题。

下标别记反： $\vec{a}_{B\text{对}A}$ 读作「B 相对 A」，前一个下标是*研究对象*（ B ，故配 m_B 与 $\vec{F}_B$ ），后一个是*参考系*（ A ，故惯性力取 $-m_B\vec{a}_A$ ）。站到 B 上看 A 便得下一行的 $\vec{F}_A=\mu\,\vec{a}_{A\text{对}B}$ ；因 $\vec{a}_{A\text{对}B}=-\vec{a}_{B\text{对}A}$ ，两式与 $\vec{F}_A=-\vec{F}_B$ 自动一致。

故

$$\vec{F}_B=\mu\,\vec{a}_{B\text{对}A},\qquad \mu=\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}.$$

B 系中同理 $\vec{F}_A=\mu\,\vec{a}_{A\text{对}B}$。$\mu$ 称为**两体约化质量**。好处：

1. 两体化单体；
2. 类似牛顿第二定律。如 A 系中

$$W_{A\to B}=\Delta\Big(\tfrac12\mu v_{\text{相}}^2\Big)=W_{\text{内}}.$$

玻尔：

$$h\nu_{m\to n}=E_m-E_n=\Delta\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\Big);$$

$m_p\approx1836\,m_e$ ，故其中的电子质量应换为约化质量 $m_e\longrightarrow\dfrac{m_em_p}{m_e+m_p}$。

由 $0=\vec{F}_A+\vec{F}_B=m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B$ 引入**质心**坐标

$$\vec{r}_C=\frac{m_A\vec{r}_A+m_B\vec{r}_B}{m_A+m_B}\Longrightarrow\vec{a}_C=0.$$

上一行已经给出 $m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B=0$ （牛顿第二定律写出 $\vec{F}_A=m_A\vec{a}_A$、$\vec{F}_B=m_B\vec{a}_B$ ，牛顿第三定律给出两者之和为零）。注意它恰好是 $m_A\vec{r}_A+m_B\vec{r}_B$ 的二阶导数——这正是 $\vec{r}_C$ 如此定义的理由；分母 m_A+m_B 只为让 $\vec{r}_C$ 有长度量纲。质量是常数，对定义直接求两次导：

$$\vec{a}_C=\ddot{\vec{r}}_C=\frac{m_A\ddot{\vec{r}}_A+m_B\ddot{\vec{r}}_B}{m_A+m_B}=\frac{m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B}{m_A+m_B}=0.$$

于是 $\vec{v}_C$ 恒定、质心系本身是惯性系——下面把 $\vec{r}_A$、$\vec{r}_B$ 用 $\vec{r}_C$ 分解才有意义。

记 $\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$ ，则

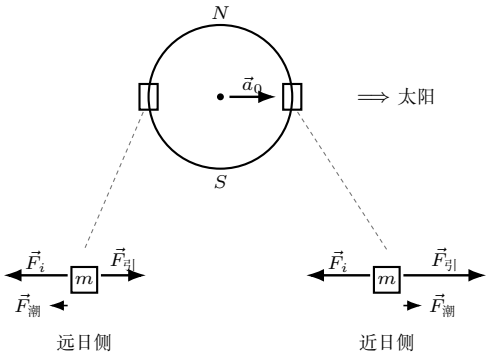
$$\vec{r}_A=\vec{r}_C-\frac{m_B}{m_A+m_B}\vec{r},\qquad \vec{r}_B=\vec{r}_C+\frac{m_A}{m_A+m_B}\vec{r},$$

$$\vec{F}_A=m_A\vec{a}_A=-\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}\ddot{\vec{r}}=\mu\,\vec{a}_{A\text{对}B},\qquad \vec{F}_B=m_B\vec{a}_B=\mu\,\vec{a}_{B\text{对}A}.$$

两步。**一、**对 $\vec{r}_A=\vec{r}_C-\frac{m_B}{m_A+m_B}\vec{r}$ 求两次导， $\ddot{\vec{r}}_C=\vec{a}_C=0$ 把 $\vec{r}_C$ 整项消掉： $\vec{a}_A=-\frac{m_B}{m_A+m_B}\ddot{\vec{r}}$ ；两边乘 m_A 即第二个等号，而 $\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}$ 就是 μ。

二、最后一个等号靠 $\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$ （由 A 指向 B ），故 $\ddot{\vec{r}}=\vec{a}_B-\vec{a}_A=\vec{a}_{B\text{对}A}$ ，于是 $-\mu\ddot{\vec{r}}=\mu\big(-\vec{a}_{B\text{对}A}\big)=\mu\,\vec{a}_{A\text{对}B}$ ——那个负号被下标对调吸收了。$\vec{F}_B$ 同法，只是 $\vec{r}_B$ 式里 $\vec{r}$ 前取 $+$ 号，故直接得 $\mu\,\vec{a}_{B\text{对}A}$ ，无需换序。

引力潮汐效应. 取**地心参考系**：随地球公转但不自转。它的牵连加速度即地心处太阳引力给出的加速度



$$\vec{a}_{牵}=\vec{a}_0=-\frac{GM_{日}}{r_0^2}\hat{r}_0,\qquad \vec{F}_i=-m\vec{a}_0.$$

地表各点受到的平动惯性力 $\vec{F}_i$ 相同，而太阳引力随距离变化；两者之差即**引潮力**。向日侧

$$F_{潮}=\frac{GM_{日}m}{(r_0-R_e)^2}-\frac{GM_{日}m}{r_0^2}=\frac{2GM_{日}m}{r_0^3}R_e.$$

最后一步是按 $R_e/r_0\ll 1$ 展开到一阶。提出 $1/r_0^2$ 后用 $(1-x)^{-2}\approx 1+2x$：

$$\frac{1}{(r_0-R_e)^2}=\frac{1}{r_0^2}\Big(1-\frac{R_e}{r_0}\Big)^{-2}\approx\frac{1}{r_0^2}\Big(1+\frac{2R_e}{r_0}\Big),$$

减掉 $1/r_0^2$ 就只剩 $2R_e/r_0^3$。等价的说法：引潮力是引力的*梯度*乘上地球半径，$F_{潮}\approx\left|\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right|R_e$，而 $F=GM_{日}m/r^2$ 求导恰好多出一个 $1/r_0$ ——这就是引潮力 $\propto 1/r_0^3$（比引力本身陡一阶）的来历，也正是下文里「近」的月球能压过「大」的太阳的原因。

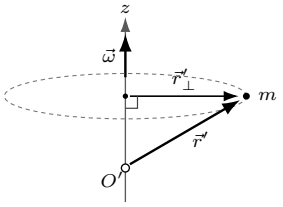
由

$$\frac{M_{日}}{r_{日}^3}\sim\frac{\rho_{日}R_{日}^3}{r_{日}^3}$$

知引潮力正比于 $\rho\big(R/r_0\big)^3$；日、月的视角 R/r_0 近似相等，故引潮力之比近似为二者密度之比——$\rho_{月}\approx 3.3\,\mathrm{g/cm^3}$、$\rho_{日}\approx 1.4\,\mathrm{g/cm^3}$，潮汐以月球为主。

2.3.3 转动系惯性力

转动非惯性系的牵连加速度为



$$\vec{a}_{牵}=\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{科里奥利加速度}}+\underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}_{\text{向心加速度（内向）}=-\omega^2\vec{r}'_\perp}+\underbrace{\vec{\beta}\times\vec{r}'}_{\text{欧拉加速度（}\omega\text{ 变）}}.$$

由 $\vec{F}_{惯}=-m\vec{a}_{牵}$ 逐项得三种惯性力：

$$\begin{cases}\vec{F}_C=m\omega^2\vec{r}'_\perp, & \textbf{惯性离心力}\\ \vec{F}_{\mathrm{cor}}=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}, & \textbf{科氏力}\\ \vec{F}_{横}=m\vec{r}'\times\vec{\beta}.\end{cases}$$

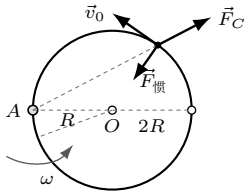
匀角速定轴转动 S' 系（ $\vec{\omega}=\text{const}$ ）. $\vec{F}_{\text{cor}}$ 不做功（力 $\perp$ 速度方向）。惯性离心力

$$\vec{F}_C=+m\omega^2\vec{r}=k\vec{r}=-\vec{\nabla}V(r),\qquad V(r)=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2,$$

V 为离心**势能**：因 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\vec{\nabla}V\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\mathrm{d}V$ ，且 $V=V_C(r)$。

> $k=m\omega^2>0$。与胡克弹力 $\vec{F}=-k\vec{x}$ 相比，这里是 $+k\vec{r}$ ——同样线性，但符号相反，指向离轴方向。
>
> V 由 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=m\omega^2r$ 积出，零点取在转轴（ $r=0$ ）即得 $V=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ ；验算用 $\vec{\nabla}(r^2)=2\vec{r}$ ，有 $-\vec{\nabla}V=\frac{1}{2}m\omega^2\cdot2\vec{r}=m\omega^2\vec{r}$ ✓。注意它开口向下：转轴处是势能极大而非胡克那样的势能谷，所以质点总想往外跑。
>
> 「因 $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\mathrm{d}V$」是保守性的判据——由全微分 $\mathrm{d}V=\vec{\nabla}V\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ 知元功等于 $-\mathrm{d}V$ ，故功只看两端的 V、与路径无关。$V=V_C(r)$ 则强调它只依赖到轴的距离 r （此处 $r=r'_\perp$ ），等势面是以转轴为轴的圆柱面。再加上 $\vec{F}_{\text{cor}}$ 不做功，匀角速转动系里机械能守恒仍然可用——下一个例子正是用它。

例. 半径 R 的光滑圆形轨道绕其上一点 A 以角速度 ω 匀速转动。质点自 A 的对径点（距转轴 $2R$ ）以相对速率 v_0 出发，恰好到达 A。

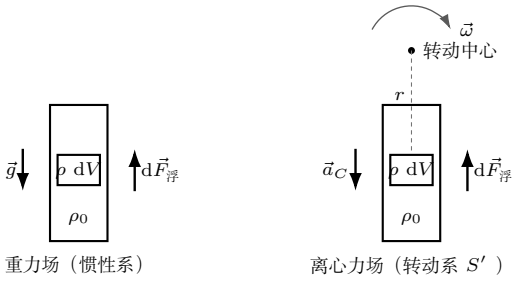


S' 系中机械能守恒：

$$E'=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2=0+0\Longrightarrow v_0=2\omega R.$$

> E' 是*转动系*里的机械能。它守恒，是因为在场的力都不改变它：轨道光滑（约束力 $\perp\vec{v}'$ ）、$\vec{F}_{\text{cor}}\perp\vec{v}'$、$\vec{F}_C$ 保守（势能 $V_C(r)=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ ，零点取在转轴）。
>
> *左边是初态*：质点在 A 的对径点，离轴距离 $r=2R$ ——注意 r 量的是到*转轴* A 的距离，不是到圆心的 R ；相对速率为 v_0 ，故 $E'=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2$。
>
> 「$0+0$」是*末态*的（动能）+（势能）：到达 A 时 $r=0$ 故势能为零，「恰好到达」即相对速率为零故动能为零。两边相等即得 $v_0=2\omega R$。换句话说，离心势能是*以转轴为山顶*的一个山包，质点要从 $r=2R$ 的山脚冲上山顶，初动能必须正好等于这段「高度」$\frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2$。

例. 铀： U^{235} 占 0.7% ， U^{238} 占 99.3%。



重力场（惯性系）中体元 $\mathrm{d}V$ 所受浮力

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{浮}}=-\rho_0\vec{g}\,\mathrm{d}V,\qquad \vec{F}_{\text{浮}}=-\oiint p\,\mathrm{d}\vec{S},$$

方向竖直向上。

压强只能垂直压向受力面：面元上周围流体施的力大小为 $p\,\mathrm{d}S$、方向沿内法向。而闭合面的 $\mathrm{d}\vec{S}$ 按惯例取外法向，故该面元受力为 $-p\,\mathrm{d}\vec{S}$，求和即得 $\vec{F}_{浮}=-\oiint p\,\mathrm{d}\vec{S}$ ——负号纯属「外法向约定」对「压强向内压」的记账。

它与 $\rho_0 g\,\mathrm{d}V$ 的等价由梯度定理给出：$\oiint p\,\mathrm{d}\vec{S}=\iiint \vec{\nabla}p\,\mathrm{d}V$，而周围液体自身静力平衡要求 $-\vec{\nabla}p+\rho_0\vec{g}=0$，即 $\vec{\nabla}p=\rho_0\vec{g}$。于是 $\vec{F}_{浮}=-\rho_0\vec{g}V$：大小 $\rho_0 gV$、方向竖直向上——这正是 Archimedes 原理。转动系里把 $\vec{g}$ 换成 $\vec{a}_C$，即得指向转动中心的「浮力」。

转动系 S' 的离心力场中，体元受方向向心的「浮力」

$$\mathrm{d}\vec{F}_{浮}=-\rho_0\vec{a}_C\,\mathrm{d}V,\qquad \mathrm{d}\vec{F}_C=\rho\,\mathrm{d}V\cdot\vec{a}_C,$$

其中离心加速度 $\vec{a}_C=\omega^2\vec{r}$ 非均匀。

科氏力.

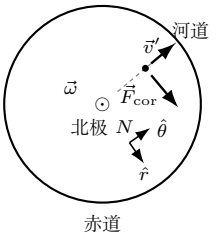
$$\vec{F}_{\mathrm{cor}}=2m\vec{v}'\times\vec{\omega},\qquad \vec{\omega}=\omega\hat{z}$$

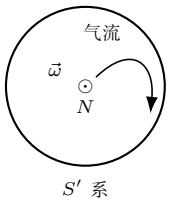
$$\vec{F}_{\mathrm{cor}}=2m\big(v_r\hat{r}+v_\theta\hat{\theta}+v_z\hat{z}\big)\times\omega\hat{z},$$

惯性离心力

$$\vec{F}_C=m\omega^2\vec{r}'_{\perp}=m\omega^2 r\,\hat{r}.$$

以地面上匀速运动的河水质元 m 为例（自北极沿河道流向赤道）：





S 系中 $\dot{r}=v'=\mathrm{const}$、$\ddot{r}=0$、$\dot{\theta}=\omega$、$\ddot{\theta}=0$，真实力的两个分量为

$$\vec{F}_r=m\big(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\big)\hat{r}=-m\omega^2\vec{r},\qquad \vec{F}_\theta=m\big(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\big)\hat{\theta}=2mv'\omega\,\hat{\theta}=2m\vec{\omega}\times\vec{v}',$$

其中 $2\dot{r}\dot{\theta}$ 一项即科氏加速度。S' 系中质元「平衡」：

三步。**一、**用 §1.3 的极坐标加速度 $\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ ——它是 S 系中的加速度；乘 m 按牛顿第二定律即真实力的两个分量，这一步还没代任何条件。

二、代入本例的运动：河水相对地面匀速径向流动，故 $\dot{r}=v'$ 为常量、$\ddot{r}=0$；它又被地球带着转，故 $\dot{\theta}=\omega$、$\ddot{\theta}=0$。于是径向只剩 $-m\omega^2 r$，角向只剩 $2mv'\omega$。

三、最后一个等号：$\vec{\omega}=\omega\hat{z}$、$\vec{v}'=v'\hat{r}$，柱坐标右手系有 $\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$，故 $2m\vec{\omega}\times\vec{v}'=2m\omega v'\hat{\theta}$。

物理上 $\vec{F}_\theta$ 是「把角向速度 $v_\theta=r\omega$ 随 r 增大而提上去」所需的真实力——河岸必须推它；其反作用正是河水对右岸的冲刷。

$$\vec{F}_C+\vec{F}_r=0,\qquad \vec{F}_{\mathrm{cor}}+\vec{F}_\theta=0\Longrightarrow\vec{F}_{\mathrm{cor}}=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}.$$

气流亦然：从北极看，气流受科氏力向右偏（北半球）。

2.4 动量定理

2.4.1 动量定理

质点动量定理. 由牛顿第二定律

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t},\qquad \vec{p}=m\vec{v},$$

$\vec{p}$ 称为（质点）**动量**。于是

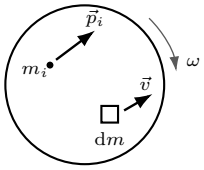
$$\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\ \mathrm{d}t,$$

其中 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\ \mathrm{d}t$ 称为**冲量元**。考虑有限时间段 $t \to t+\Delta t$ ，定义**冲量**

$$\vec{I} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}\ \mathrm{d}t = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t).$$

质点系动量定理. 质点系动量

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \implies \int \mathrm{d}m\,\vec{v}.$$



对时间取微分并按内外力分开：

$$\mathrm{d}\vec{P} = \mathrm{d}\Big(\sum_i \vec{p}_i\Big) = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i = \mathrm{d}\vec{I}_{\text{内}} + \mathrm{d}\vec{I}_{\text{外}},$$

$$\mathrm{d}\vec{I}_{\text{内}} = \Big(\sum_i \vec{F}_{i\text{内}}\Big)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\text{牛顿第三定律}} 0, \qquad \mathrm{d}\vec{I}_{\text{外}} = \Big(\sum_i \vec{F}_{i\text{外}}\Big)\,\mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{合外}}\ \mathrm{d}t,$$

故

$$\vec{F}_{\text{合外}} \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}, \qquad \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{\text{合外}}\ \mathrm{d}t = \Delta\vec{P}.$$

*** 质心.**

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \qquad \text{即} \qquad m\vec{r}_C = \sum_i m_i\vec{r}_i \quad \Big(m = \sum_i m_i\Big).$$

质心动量

$$\vec{P}_C = m\dot{\vec{r}}_C = \vec{P},$$

质心运动定理

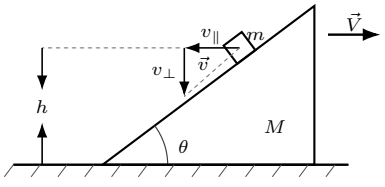
$$\vec{F}_{\text{合外}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C.$$

大炮中扔出菜刀：菜刀含自转，但其质心仍作匀速直线运动。

2.4.2 动量守恒定律

若 $\vec{F}_{\text{合外}} = 0$ ，则 $\vec{P}$ 守恒；若 $F_{\text{合外},x} = 0$ ，则 P_x 守恒。

例：光滑斜面上的滑块.



水平方向无外力，故水平动量守恒：

$$mv_{\parallel} = MV, \qquad (m\vec{v} + M\vec{V})_{\parallel} = 0.$$

一对法向力做功之和为零（ $\vec{N}$ 为滑块施于斜面的法向力， $-\vec{N}$ 为斜面施于滑块的反作用力）：

$$\vec{N}\cdot\vec{V}\ \mathrm{d}t + (-\vec{N})\cdot\vec{v}\ \mathrm{d}t = 0.$$

> 这是「一对力做功和」在光滑约束上的特例： $\vec{N}$ 作用在斜面上，配斜面的速度 $\vec{V}$ ； $-\vec{N}$ （牛顿第三定律）作用在滑块上，配滑块的速度 $\vec{v}$。合起来
>
> $$\mathrm{d}W_{\text{和}} = \vec{N}\cdot(\vec{V}-\vec{v})\ \mathrm{d}t = -\vec{N}\cdot\vec{v}_{\text{相对}}\ \mathrm{d}t.$$
>
> 滑块始终贴在斜面上 $\Longrightarrow \vec{v}_{\text{相对}}$ 沿斜面，而 $\vec{N}\perp$ 斜面，故点积为零。
>
> 但单独一项并不为零： $\vec{N}$ 指向斜面内侧（滑块压着它），取外法向 $\hat{n}=(-\sin\theta,\cos\theta)$ 可算出 $\vec{N}\cdot\vec{V} = +NV\sin\theta > 0$、$(-\vec{N})\cdot\vec{v} = -NV\sin\theta < 0$ ——法向力把能量从滑块搬给斜面，只是搬运中不生不灭。这正是下面 $W_{N\text{对}M} = +\frac{1}{2}MV^2$ 的由来。

斜面上只有这一个力做功，故 $W_{N\text{对}M} = \frac{1}{2}MV^2$ ，从而 $W_{N\text{对}m} = -\frac{1}{2}MV^2$ ；系统机械能守恒：

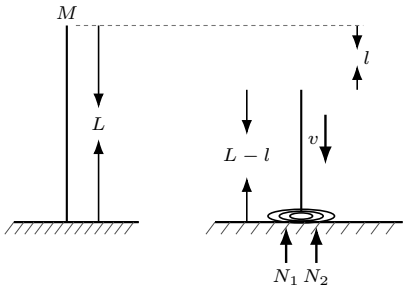
$$\tfrac{1}{2}m\big(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2\big) + \tfrac{1}{2}MV^2 = mgh.$$

换到 M 系，相对速度 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ 必沿斜面方向，故

$$\frac{v_{\parallel} + V}{v_{\perp}} = \cot\theta.$$

> 依据是约束：滑块既不能陷进斜面、也不能飞离，所以在随斜面平动的 M 系里，它的轨迹就是斜面本身——相对速度 $\vec{v}'$ 必沿斜面。
>
> 再看分量。斜面只水平运动， $\vec{V}$ 没有竖直分量，故竖直分量两系相同，仍是 $v_{\perp}$ ；水平方向上滑块向左、斜面向右，方向相反，作差后绝对值相加，得 $v_{\parallel}+V$。
>
> 斜面与水平面成 θ ，沿斜面的方向满足 $\tan\theta = \dfrac{\text{竖直}}{\text{水平}} = \dfrac{v_{\perp}}{v_{\parallel}+V}$ ，取倒数即得原式。

例：绳落地. 质量 M、长 L 的匀质细软绳竖直悬垂，下端恰与地面接触；释放后求已落下 l 时地面所受正压力 N。



下落段自由下落， $v = \sqrt{2gl}$。N 分两部分：已堆积段的重量

$$N_1 = N(l) = \frac{l}{L}Mg,$$

以及 $\mathrm{d}t$ 内新落地绳元的动量改变（ $\mathrm{d}m = \frac{M}{L}v\ \mathrm{d}t$ ）：

$$N_2\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}m\cdot\Delta v = \frac{M}{L}v\ \mathrm{d}t\big(0-(-v)\big), \qquad N_2 = \frac{M}{L}v^2 = \frac{2l}{L}Mg,$$

$$N = N_1 + N_2 = \frac{3l}{L}Mg.$$

整体法：以整根绳为研究对象，只有仍在下落的 $L-l$ 段带有动量，

$$P(t)=\frac{L-l}{L}Mv,$$

$$\dot{P}=-\frac{\dot{l}}{L}Mv+\Big(1-\frac{l}{L}\Big)M\dot{v}=-\frac{M}{L}v^2+\Big(1-\frac{l}{L}\Big)Mg=Mg-N,$$

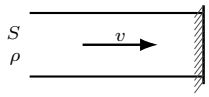
这个等号就是质点系动量定理 $\dot{\vec{P}}=\vec{F}_{\text{合外}}$：左边由 $P(t)=\frac{L-l}{L}Mv$ 求导得到（用了 $\dot{l}=v$ 与 $\dot{v}=g$），右边是整根绳所受的合外力。

取向下为正，整根绳的外力只有两个：重力 Mg 与地面支持力 $-N$。两点要留意：①落地段与悬空段之间的张力是内力，按牛顿第三定律成对抵消——这正是整体法省事之处；②重力取 Mg 而非 $\frac{L-l}{L}Mg$，因为研究对象是整根绳，地上那堆的重量同样是外力。

P 只数悬空段（地上那堆动量为零），而 $\vec{F}_{\text{合外}}$ 要数全部重量——这个不对称是本题唯一易错处。解出 $N=\frac{M}{L}v^2+\frac{l}{L}Mg$，代 $v^2=2gl$ 即回到 $\frac{3l}{L}Mg$。

$$N=\frac{M}{L}v^2+\frac{l}{L}Mg.$$

例：流体冲击.



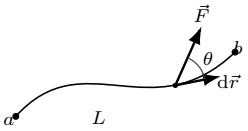
$\mathrm{d}t$ 内打到壁上的流体质量为 $\rho S_\perp v\ \mathrm{d}t$，其动量全部交给壁：

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\rho\cdot S_\perp\cdot v\ \mathrm{d}t\cdot v=\rho v^2S_\perp\ \mathrm{d}t,\qquad \text{压强}\quad p=\frac{F}{S_\perp}=\rho v^2.$$

第三章　能量

3.1　动能定理

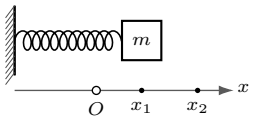
3.1.1　功



$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}, \qquad W_{a\to b,L} = \int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

1. W 依赖于 $L \Longrightarrow$ 功是**过程量**。相对的，**状态量** $f = f(\vec{r},\vec{v})$ ，如 $E_k = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$、$V = V(\vec{r})$。
2. W 依赖于参考系。

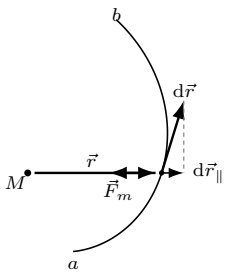
例：胡克弹力. 选平衡位置为原点（弹簧静止系）， $F = -kx$。



$$W_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}k\big(x_1^2 - x_2^2\big),$$

只依赖初末状态，有**保守性**。

例：万有引力做功. 取力心 M 系。



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r},$$

$$\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \hat{r}\cdot\big(\mathrm{d}r\,\hat{r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}\big) = \mathrm{d}r, \qquad \vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}r^2 = r\ \mathrm{d}r,$$

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r,\qquad W_{a\to b}=\int_{r_a}^{r_b}\Big(-\frac{GMm}{r^2}\Big)\,\mathrm{d}r=GMm\Big(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\Big).$$

三步都在做同一件事：把 $\mathrm{d}\vec{r}$ 里只有径向的那一份挑出来。

一、用 §1.3 的极坐标线元 $\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\hat{r}+r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}$，再用 $\hat{r}\cdot\hat{r}=1$、$\hat{r}\cdot\hat{\theta}=0$，横向项整个消失，只剩 $\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r$。几何上它就是位移在径向的投影（图中的 $\mathrm{d}\vec{r}_{\parallel}$）——横向那一份沿圆周走，根本不改变 r。

二、对 $r^2=\vec{r}\cdot\vec{r}$ 求微分得 $\mathrm{d}(r^2)=2\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$，故 $\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)=r\,\mathrm{d}r$。（笔记写的 $\frac{1}{2}\mathrm{d}r^2$ 指 $\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)$，不是 $\frac{1}{2}(\mathrm{d}r)^2$。）也可由第一步直接得 $\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=r\,(\hat{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r})=r\,\mathrm{d}r$。

三、代入 $\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ 即得；若把力写成 $-\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$，就改用第二步，结果一样。要点是被积式只剩 r 的函数，积分只看 r_a、r_b——这正是保守性。

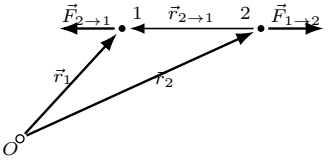
力心、有心力场.

$$\vec{F}=F(r)\,\hat{r}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}F(r)>0: & \textbf{斥力场}\\ F(r)<0: & \textbf{引力场}\end{cases}$$

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F(r)\,\mathrm{d}r,\qquad W_{a\to b}=\int_{r_a}^{r_b}F(r)\,\mathrm{d}r$$

——与路径无关，保守。

一对力（满足牛顿第三定律）的做功和不依赖于参考系.



牛顿第三定律给出两条：

$$①\quad\vec{F}_{1\to2}+\vec{F}_{2\to1}=0,\qquad②\quad\vec{F}_{2\to1}\parallel\vec{r}_{2\to1}.$$

于是

$$\mathrm{d}W_{\text{和}}=\vec{F}_{2\to1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{F}_{1\to2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2\xrightarrow{①}\vec{F}_{2\to1}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_1-\mathrm{d}\vec{r}_2)=\vec{F}_{2\to1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{2\to1}\xrightarrow{②}F_{2\to1}\,\mathrm{d}r_{2\to1},$$

只依赖相对距离的改变，故**不依赖参考系**。

推论.

1. 内力做功和 $\mathrm{d}W_{\text{内}}$ 不依赖于参考系。**刚体**：$\mathrm{d}W_{\text{内}}=0$。
2. $\mathrm{d}W_{\text{和}}=\mathrm{d}W_{\text{对}1}(2\text{ 系})=\mathrm{d}W_{\text{对}2}(1\text{ 系})$。

对万有引力，

$$\mathrm{d}W_{\text{和}}=\mathrm{d}W_{\text{对}m}(M\text{ 系})\implies W_{\text{和}}=GMm\Big(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\Big),$$

其中 r 是两体的相对距离——这正是保守性的来源。

刚证得的 $\mathrm{d}W_{\text{和}}=\vec{F}_{2\to1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{2\to1}$ 只含*相对位移*，那就挑个最省事的系来算：站在质点 2 上，则 $\mathrm{d}\vec{r}_2=0$，作用在 2 上的力不做功，整个和只剩对 1 的功——这便是 $\mathrm{d}W_{\text{和}}=\mathrm{d}W_{\text{对}1}(2\text{ 系})$；两者对调即得第二个等号。

换句话说，*一对力的做功和永远可以当成一个力的功来算*，只要坐到另一个质点上去。

万有引力就取 M 系，算出来正是前面那个例子的 $W_{a\to b}$。差别在于：那时它看起来只是「M 系中的功」，现在知道它就是 $W_{\text{和}}$、与参考系无关——前提是把 r 读成两体的*相对距离*（距离本身就是参考系不变的）。

3.1.2 动能定理

质点动能定理.

$$\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_t\, v\ \mathrm{d}t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} v\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\big(\tfrac{1}{2}mv^2\big),$$

定义**动能** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，则

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_k.$$

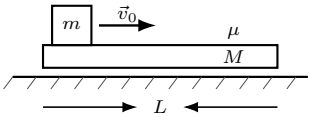
质点系动能定理.

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{\,2} \implies \int \tfrac{1}{2}v^2\ \mathrm{d}m,$$

$$\mathrm{d}E_k = \sum_i \mathrm{d}E_{ki} = \mathrm{d}W_{\text{内}} + \mathrm{d}W_{\text{外}},$$

其中 $\mathrm{d}W_{\text{内}}$ 不依赖参考系。

例：粗糙平板上的滑块. 光滑地面上放一块长 L、质量 M 的粗糙平板（摩擦系数 μ ），小物块 m 以水平初速 $\vec{v}_0$ 滑入。



滑动临界：物块滑到末端时与板共速 v ，

$$mv_0 = (M+m)v,$$

$$W_{\text{内}} = \tfrac{1}{2}(M+m)v^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \frac{m^2}{2(M+m)}v_0^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = -\tfrac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0^2,$$

而在 M 系中 $W_{\text{内}} = -\mu mg\cdot L$ ，故不滑出的条件为

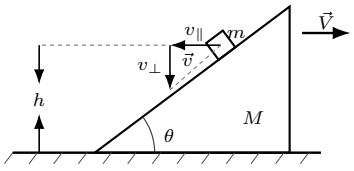
$$v_0^2 \le 2\mu g L\,\frac{M+m}{M}.$$

亦可直接当作一维孤立两体问题处理：

$$-\mu mg = \frac{mM}{m+M}a_{m\text{对}M} \implies W_{\text{内}} = \Delta\Big(\tfrac{1}{2}\frac{mM}{M+m}v_{\text{相对}}^2\Big) = 0 - \tfrac{1}{2}\frac{mM}{M+m}v_0^2.$$

> 把 §2.3.2 的约化质量搬过来（那里记作 μ ，此处 μ 已用作摩擦系数，故写全为 $\frac{mM}{m+M}$ ）。地面光滑 $\implies$ 水平方向无外力 $\implies$ 这是孤立两体，两者间的相互作用力就是滑动摩擦 μmg。
>
> **第一式**即 $\vec{F} = \frac{mM}{m+M}\vec{a}_{m\text{对}M}$ ：相对运动等效为一个质量 $\frac{mM}{m+M}$ 的单体在作匀减速。
>
> **第二式**是对这个等效单体用动能定理，$\mathrm{d}W = \frac{mM}{m+M}a_{\text{相对}}\,\mathrm{d}s_{\text{相对}} = \mathrm{d}\big(\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_{\text{相对}}^2\big)$。左边之所以正是 $W_{\text{内}}$ ，靠的是 §3.1.1 刚证的「一对力做功和 $= \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\text{相对}}$」——否则没理由把它算作内力功。
>
> **第三式**代端点：初相对速率为 v_0 （板静止），末相对速率为 0 （共速）。与上面「动量守恒 + 两个物体的动能」算得的结果相同，但只需跟踪一个量。

例：光滑斜面上的滑块（承 §2.4 ）.



三条方程

$$mv_{\parallel}=MV,\qquad \tfrac12 m\big(v_{\perp}^2+v_{\parallel}^2\big)+\tfrac12 MV^2=mgh,\qquad \frac{v_{\parallel}+V}{v_{\perp}}=\cot\theta$$

给出

$$v_{\parallel}=\frac{M}{M+m}(v_{\parallel}+V),\qquad V=\frac{m}{M+m}(v_{\parallel}+V),$$

> 这一行只是把 $mv_{\parallel}=MV$ 改写成「按质量反比分配」。记 $u=v_{\parallel}+V$ （即相对的水平速率）。
>
> 由 $mv_{\parallel}=MV$ 得 $\dfrac{v_{\parallel}}{V}=\dfrac{M}{m}$ ，即 $v_{\parallel}:V=M:m$ ；两者之和为 u ，按这个比例分配就是 $v_{\parallel}=\frac{M}{M+m}u$、$V=\frac{m}{M+m}u$。（逐步算同样： $V=\frac{m}{M}v_{\parallel}\Rightarrow u=v_{\parallel}\big(1+\frac{m}{M}\big)=v_{\parallel}\frac{M+m}{M}$。）
>
> *为什么要这么改写*：第三个方程给的是 $u=v_{\perp}\cot\theta$ ，只含 u。把 $v_{\parallel}$ 与 V 都换成 u ，三个未知数就并成一个，下一行代进能量式便可解出。

$$\tfrac12 mv_{\parallel}^2+\tfrac12 MV^2=\tfrac12\frac{mM^2+Mm^2}{(M+m)^2}(v_{\parallel}+V)^2=\tfrac12\frac{Mm}{M+m}(v_{\parallel}+V)^2,$$

代回能量式即得

$$\tfrac12\frac{Mm}{M+m}(v_{\parallel}+V)^2+\tfrac12 m\tan^2\theta\,(v_{\parallel}+V)^2=mgh.$$

两体动能的分解.

$$\tfrac12 m_1\vec v_1^{\,2}+\tfrac12 m_2\vec v_2^{\,2}=\frac{(m_1\vec v_1+m_2\vec v_2)^2}{2(m_1+m_2)}+\tfrac12\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec v_1-\vec v_2)^2,$$

> 纯代数恒等式，两条路都可以看。
>
> **直接展开右边**（记 $M=m_1+m_2$、$\mu=\frac{m_1m_2}{M}$ ）：两个平方各自展开后，交叉项 $\vec v_1\cdot\vec v_2$ 的系数是 $\frac{2m_1m_2}{2M}-\frac{2m_1m_2}{2M}=0$ ，恰好抵消；剩下 v_1^2 的系数为 $\frac{m_1^2+m_1m_2}{2M}=\frac{m_1}{2}$ ， v_2^2 同理——即左边。前面那两个系数本就是为抵消交叉项而配的。
>
> **看清它的来路**：这就是柯尼希定理用在两体上。第一项代入 $\vec v_C=\frac{m_1\vec v_1+m_2\vec v_2}{M}$ 即 $\frac12 Mv_C^2$ ；而质心系中 $\vec v_1'=\frac{m_2}{M}\vec v_{\text{相对}}$、$\vec v_2'=-\frac{m_1}{M}\vec v_{\text{相对}}$ （又是按质量反比分配），故 $\sum_i\frac12 m_iv_i'^2=\frac12\frac{m_1m_2}{M}v_{\text{相对}}^2$ ——正是第二项。

记 $\vec P=M\vec v_C$ （ $M=m_1+m_2$ ）、$\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ ，即

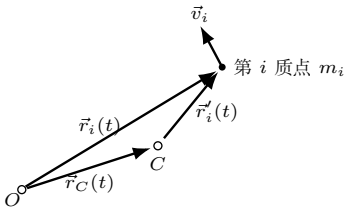
$$E_k=\frac{P^2}{2M}+\tfrac12\mu v_{\text{相对}}^2=\tfrac12 Mv_C^2+\tfrac12\mu v_{\text{相对}}^2.$$

孤立两体： $\vec P=\text{const}$ ，故

$$\mathrm{d}W_{\text{内}}=\mathrm{d}(E_{k1}+E_{k2})=\mathrm{d}\big(\tfrac12\mu v_{\text{相对}}^2\big).$$

> 孤立 $\Longrightarrow$ 无外力 $\Longrightarrow$ 同时给出两件事：① $\vec P$ 守恒；② $\mathrm{d}W_{\text{外}}=0$。
>
> 由②与质点系动能定理 $\mathrm{d}E_k=\mathrm{d}W_{\text{内}}+\mathrm{d}W_{\text{外}}$ 得 $\mathrm{d}W_{\text{内}}=\mathrm{d}E_k$ ——这是第一个等号。
>
> 由①与上面的分解 $E_k=\frac{P^2}{2M}+\frac12\mu v_{\text{相对}}^2$ ：第一项被*冻住*（ P 与 M 都不变），微分为零，于是 E_k 的全部变化都落在第二项——这是第二个等号。
>
> 结论：孤立两体的内力做功全部*进入相对运动*，质心平动那一份一分也分不走。前面粗糙平板那个例子用的正是它： $-\mu mgL=\Delta\big(\frac12\frac{mM}{M+m}v_{\text{相对}}^2\big)$。

柯尼希定理. 质点系运动＝随质心的运动＋质心系中的运动。**质心系**指随质心平动的参考系。



$$\vec{r}_i(t)=\vec{r}'_i(t)+\vec{r}_C(t),\qquad \vec{v}_i=\vec{v}'_i+\vec{v}_C.$$

加权求和：

$$\underbrace{\sum_i m_i\vec{r}_i}_{m\vec{r}_C}=\sum_i m_i\vec{r}'_i+m\vec{r}_C\implies \sum_i m_i\vec{r}'_i=0=m\vec{r}_{C\text{对}C},$$

$$\sum_i m_i\vec{v}_i=\vec{P}=m\vec{v}_C,\qquad \sum_i m_i\vec{v}'_i=0=\vec{P}'.$$

于是

$$\begin{aligned}E_k&=\sum_i\tfrac{1}{2}m_i\left(\vec{v}'_i+\vec{v}_C\right)^2=\Big(\sum_i\tfrac{1}{2}m_i\Big)\vec{v}_C^2+\sum_i\tfrac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2+\Big(\sum_i m_i\vec{v}'_i\Big)\cdot\vec{v}_C\\&=\tfrac{1}{2}m\vec{v}_C^2+\sum_i\tfrac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2=\tfrac{1}{2}m\vec{v}_C^2+E'_k.\end{aligned}$$

多体碰撞. 碰撞中 $\frac{1}{2}mv_C^2$ 因动量守恒而不变，可以损失掉、转化为其他形式能量的只有质心系动能 E'_k ——它被称为**资用能**。

3.2 保守力与势能

3.2.1 保守力

- **特定系**：单个力做功仅依赖于初末位置，与路径无关。
- **任意系**：一对力做功仅依赖于初末相对位置，与路径无关。

数学判据：

$$\oint_L\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0,\quad\forall L\qquad\Longrightarrow\qquad\vec{\nabla}\times\vec{F}=0.$$

> **为什么要分「特定系」与「任意系」。**单个力的 $\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$ 是对某个系讲的：在 S 系里闭合的路径，换到 S' 系一般不再闭合（质点确实回到了原处，可 S' 自己走掉了），判据必须重做一遍。§2.4.2 的斜面就是现成的例子：$\vec{N}$ 对滑块做的功在地面系是 $-\frac{1}{2}MV^2\neq0$，在斜面系却恰为零。
>
> 而一对力的 $\mathrm{d}W_{和}=\vec{F}_{2\to1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{2\to1}$（§3.1.1）只含相对位移，而相对位置是参考系不变的——「相对位形回到初值」是个与参考系无关的说法，故判据对任意系都成立。
>
> **判据那一步**就是 Stokes 定理 $\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$：左边对一切 L 为零 $\Rightarrow$ 右边对一切 S 为零 $\Rightarrow$ 把 S 收缩成任意取向的一点，即得 $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$。$\forall L$ 不可少——与 §2.2.3 由 $\forall V$ 得 Gauss 定理微分式是同一步棋。

常见保守力：

1. **恒力**：$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$，且

$$\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\vec{F}\cdot\oint_L\mathrm{d}\vec{r}=0.$$

> 两步。**提出常矢量**：$\vec{F}$ 不随位置变化，与积分变量无关，故可提到积分号外——按分量看就是 $\oint(F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z)=F_x\oint\mathrm{d}x+F_y\oint\mathrm{d}y+F_z\oint\mathrm{d}z$。这一步只有 $\vec{F}$ 为常矢量时才成立。
>
> $\oint_L\mathrm{d}\vec{r}=0$：所有位移元加起来就是总位移 $\vec{r}_{终}-\vec{r}_{始}$，路径闭合故为零。
>
> 至于 $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$：常矢量场的偏导数全为零，旋度的每个分量都平凡地为零，如 $\partial_yF_z-\partial_zF_y=0-0=0$。
>
> 注意「恒力」同样是对某个系说的：如地面附近平动系中的重力。换到转动系，重力相对该系基矢的方向随时间转动，已不是常矢量场，这一步就提不出来了。

2. **有心力场**（取力心系）：$\vec{F}(\vec{r})=F(r)\hat{r}$，故 $\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F(r)\,\mathrm{d}r$，

$$\oint\mathrm{d}W=\oint F(r)\,\mathrm{d}r=0.$$

3.2.2 势能

$$E_p(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad \mathrm{d}E_p = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla}E_p,$$

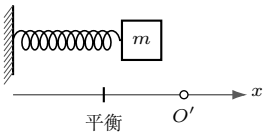
其中 $\vec{r}_0$ 为**势能零点**，即 $E_p(\vec{r}_0)=0$。

引入负号是为了：保守系统中

$$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}W = -\,\mathrm{d}E_p \implies \mathrm{d}(E_k+E_p)=0 \implies E = E_k + E_p,$$

E 称为**机械能**——动能与势能平权等价。

例：弹性势能.

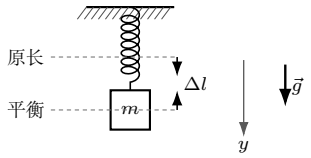


选平衡位置为原点， $F(x)=-kx$ ：

$$E_p(x) = \int_x^0 (-kx)\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

选 O' 为原点则 $F(x') = -k(x'-x_{平})$ ；再选 x'_0 为零点，

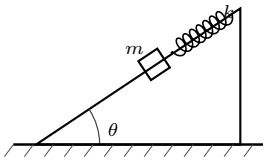
$$E_p(x) = \int_{x'}^{x'_0} -k\big(x''-x_{平}\big)\,\mathrm{d}x'' = \tfrac{1}{2}k\big(x'-x_{平}\big)^2 - \tfrac{1}{2}k\big(x'_0-x_{平}\big)^2.$$



选平衡位置为原点及零点， $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$ ，则

$$E_p(y) = \tfrac{1}{2}k\Big(y+\frac{mg}{k}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}k\Big(\frac{mg}{k}\Big)^2 - mgy = \tfrac{1}{2}ky^2,$$

$$F(y) = -k\Big(y+\frac{mg}{k}\Big) + mg = -ky, \qquad E_p(y) = \int_y^0 (-ky)\ \mathrm{d}y.$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

这三张图其实是同一件事：*恒力只挪动平衡位置，不改变等效劲度。*

斜面上沿坡向只有两个力：弹簧的 $-k\xi$ 与重力分量 $-mg\sin\theta$。把 x 自新平衡位置量起（ $k\Delta l = mg\sin\theta$ ，即 $\Delta l = \frac{mg\sin\theta}{k}$ ），则

$$F(x) = -k(x+\Delta l) + mg\sin\theta = -kx,$$

常数项整好抵消，与水平情形同形，故 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ ，与 θ、g 都无关。

用势能看更干脆：恒力的势能对 x 是线性的，给抛物线添一个线性项只是把它平移（配方），曲率 $E_p'' = k$ 分毫未动；而周期只由极小点处的曲率决定。水平、竖直、斜面无非是 $\Delta l = 0$、$\frac{mg}{k}$、$\frac{mg\sin\theta}{k}$ 三个取值。

例：万有引力势能. 选无穷远点为势能零点， $\mathrm{d}W = -\dfrac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r$ ，故 M 系中

$$E_p(r) = \int_r^\infty \Big(-\frac{GMm}{r'^2}\Big)\,\mathrm{d}r' = \frac{GMm}{r'}\bigg|_r^\infty = -\frac{GMm}{r}.$$

例：离心力场. $\vec{F}_C = m\omega^2\vec{r}_\perp$ ， $\omega = \text{const}$ （沿 r 方向），故

$$E_{pc}(r) = \int_r^0 m\omega^2 r\ \mathrm{d}r = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

3.3 静电场环路定理

单个静止点电荷激发的电场 $\vec{E}_q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ 是有心力场，故保守：

$$\oint_L \vec{E}_q \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0, \quad \forall L.$$

由叠加原理 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_{qi}$ ，对固定环路

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \oint_L \vec{E}_{qi}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0,$$

即静电场是**无旋场**。

> 三步。①单个点电荷的 $\vec{E}_q$ 是有心力场，由 §3.2.1 第 2 条即得 $\oint_L \vec{E}_q\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \oint E(r)\,\mathrm{d}r = 0$。②线积分是线性的，故求和号可与积分号交换——笔记强调「固定环路」正为此：每一项都沿同一条 L 去积，交换才合法。③再用 Stokes 定理与 L 的任意性。
>
> 可见这里唯一的新内容是第②步（叠加原理），①③都是从 §3.2.1 搬过来的。

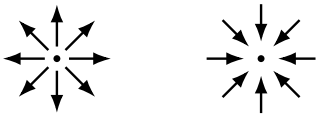
与第二章的 Gauss 定理合起来即**静电场 Maxwell 方程组**

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \end{cases}$$

它是完备的。

> 两式分别是散度与旋度的方程，各由一条积分定理加「任意性」压缩而来：
>
> $$\underbrace{\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \tfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V}_{\text{Gauss，}\forall V} \ \to\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \tfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \underbrace{\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0}_{\text{Stokes，}\forall L} \ \to\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0.$$
>
> 散度是标量： $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ ，量的是「单位体积的净通量」，答「此处有无源」。旋度是矢量： $(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ ，量的是「单位面积的环量」，答「此处打不打旋」。
>
> 「完备」的含义：由 Helmholtz 定理，在无穷远处衰减的矢量场由它的散度与旋度唯一确定——两式齐备， $\vec{E}$ 就被 ρ 完全定死了。

静电场因而是**有源无旋场**：场线有起点有终点，但没有闭合环路。



正源（源）　　负源（汇）

速度场. $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ ，如流体——它同样可以有正源与负源。

电势.

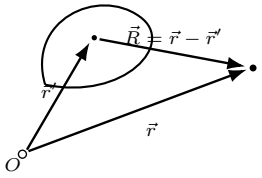
$$U_r = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad \mathrm{d}U = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}, \qquad q_0\vec{E} = -q_0\vec{\nabla}U, \qquad q_0U = W_e,$$

其中 q_0 为试探电荷， q_0U 即**电势能**， $\vec{r}_0$ 为电势（能）零点。

对点源 q ，选 $U_\infty \to 0$ ：

$$U(r) = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\mathrm{d}r' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

电势叠加原理.



$$U(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'.$$

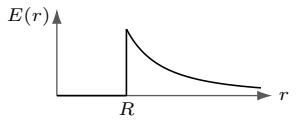
> 三步。①点源已得 $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ （取 $U_\infty\to 0$ ）。②叠加：由 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_{qi}$ 与线积分的线性，
>
> $$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \int_{\vec{r}}^\infty \vec{E}_{qi}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}_i|};$$
>
> 各项必须取同一个零点（都取 ∞ ），否则不能直接相加。③连续化： $q_i \to \rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}^3\vec{r}'$ 、$\sum \to \int$ ，而 $|\vec{r}-\vec{r}'|=R$ 正是图中源点到场点的距离。
>
> 好处在于：对比 §2.2.3 的 $\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}'$ ——那是矢量积分，三个分量各带方向、还要处理相消；这里是标量积分，算完再由 $\vec{E}=-\vec{\nabla}U$ 求场即可。这正是引入电势的实际理由。（ $U_\infty\to 0$ 要求电荷分布有限，无穷大带电面或带电直线不能这样取零点。）

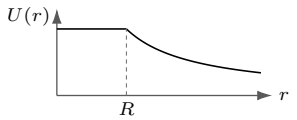
均匀带电球壳 (Q,R)**.** 选 $U_\infty\to 0$。

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r>R \\ 0, & r<R \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad U(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r<R \end{cases}$$

球内**等势**：

$$U(r) = \int_r^R \underbrace{E(r)}_{\text{为}0}\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r.$$





均匀带电球 (Q,R)**.** 选 $U_\infty\to 0$。

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}, & r>R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}, & r<R \end{cases} \qquad U(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2-r^2\right), & r<R \end{cases}$$

仍用场强积分法 $U(r)=\int_r^\infty E\,\mathrm{d}r'$，场强取自 §2.2.3。

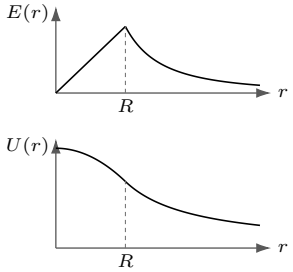
球外直接积：$\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\mathrm{d}r'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，与点电荷相同。

球内的积分路径要穿过球面，故必须分两段：

$$U(r)=\underbrace{\int_r^R \frac{Qr'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\mathrm{d}r'}_{=\frac{Q(R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}}+\underbrace{\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\mathrm{d}r'}_{=\frac{2QR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}},$$

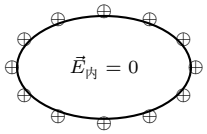
通分即得 $\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$ ——$3R^2$ 中的 R^2 来自球内段、$2R^2$ 来自球外段。

核对：$r=R$ 处两式都给出 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$（连续）；$r=0$ 处为表面值的 $\frac{3}{2}$ 倍；且 $-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=E_{\text{内}}$。与球壳的差别只在球内那一段：球壳 $E_{\text{内}}=0$，该段为零，故内部等势。



电势的单位 1 Volt = 1 J/C；空气的击穿场强 $E_{\text{空气}}=3\times10^4$ V/cm。

静电平衡.



导体内部

$$\vec{E}_{\text{内}}=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \rho_{\text{内}}=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\text{内}}=0,$$

即内部无电荷，电荷只能分布在表面。反证：若内部有电荷，有正必有负，其间便有电场线，这违反内部作为「等势体」的特性。

3.4 机械能定理

由质点系动能定理 $\mathrm{d}W_{\text{外}}+\mathrm{d}W_{\text{内}}=\mathrm{d}E_k$。在某特定系中把力区分为保守与非保守，

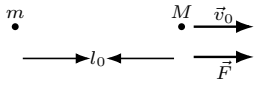
$$\mathrm{d}W_{\text{外保}}=-\,\mathrm{d}E_{p\text{外}},\qquad \mathrm{d}W_{\text{内保}}=-\,\mathrm{d}E_{p\text{内}},$$

引入**机械能**

$$E=E_k+E_{p\text{外}}+E_{p\text{内}} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{d}E=\mathrm{d}W_{\text{外非保}}+\mathrm{d}W_{\text{内非保}}.$$

若 $\mathrm{d}W_{\text{外非保}}+\mathrm{d}W_{\text{内非保}}=0$，则**机械能守恒**。

例：两体万有引力系统. 背景惯性 S 系中，m 初始静止于与 M 相距 l_0 处；M 在变力 $\vec{F}$ 作用下始终以 $\vec{v}_0$ 作匀速直线运动。求最大间距 l_m 与此时变力做的功 W_F。



（背景惯性 S 系）

达到最大间距时两者具有共同速度 $\vec{v}_0$ ，故 S 系中

$$W_F=\Delta E=\Big[\tfrac12(m+M)v_0^2-\frac{GMm}{l_m}\Big]-\Big[\tfrac12Mv_0^2-\frac{GMm}{l_0}\Big]=\tfrac12mv_0^2+\Big[\frac{GMm}{l_0}-\frac{GMm}{l_m}\Big].$$

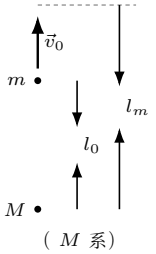
M 系是惯性系（ M 匀速），其中 $W_F'=0$ ，故机械能守恒：

为什么要换系。S 系那条方程里有两个未知量（ l_m 与 W_F ），解不动。而 M 匀速 $\Rightarrow$ M 系是惯性系（ $\vec{a}_{牵}=0$ ，不必补惯性力）； $\vec{F}$ 作用在 M 上， M 在该系中静止、位移为零，故 $W_F'=0$ ——那个未知量当场消失。剩下只有保守的万有引力，于是机械能守恒。

图在说什么。M 系中 M 不动， m 以相对速率 v_0 背离它（ S 系中 m 静止、M 以 v_0 离开，相对速率正是 v_0 ），一路被引力减速，到最远处 l_m 时相对速率为零。故

$$\underbrace{\tfrac12mv_0^2-\frac{GMm}{l_0}}_{\text{初}}=\underbrace{0-\frac{GMm}{l_m}}_{\text{末}},$$

这就是一道标准的「抛出去能走多远」——适用条件 $v_0<\sqrt{2GM/l_0}$ 正是「慢于逃逸速度」。先在此解出 l_m ，再代回 S 系的方程，才得到 $W_F=mv_0^2$。



$$\tfrac12mv_0^2-\frac{GMm}{l_0}=-\frac{GMm}{l_m}\qquad\Longrightarrow\qquad l_m=\frac{GMm}{\dfrac{GMm}{l_0}-\tfrac12mv_0^2}.$$

代回 S 系的机械能定理方程得

$$W_F=mv_0^2,$$

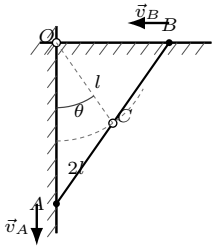
适用于 $v_0<\sqrt{\dfrac{2GM}{l_0}}$ （逃逸速度）。若 $v_0>\sqrt{\dfrac{2GM}{l_0}}$ 则 $l_m\to\infty$ ，

$$\tfrac12mv_\infty^2=\tfrac12mv_0^2-\frac{GMm}{l_0},\qquad W_F=\tfrac12m\big(v_0^2-v_\infty^2\big)+\frac{GMm}{l_0}.$$

在 S 系中也可直接算： $\vec{F}$ 的作用点始终以 $\vec{v}_0$ 运动，故

$$W_F=\int_0^{\Delta t}\big(\vec{F}\cdot\vec{v}_0\big)\,\mathrm{d}t=v_0\int_0^{\Delta t}F\,\mathrm{d}t=v_0\cdot mv_0.$$

例：直角滑道中的刚性杆. 相同小球 A、B 由长 $2l$ 的刚性轻杆连接，分别被约束在竖直、水平光滑滑道内运动。已知 $m_A=m_B=m$、$|\theta|\ll1$ ，求周期 T。



作为参照，摆长 l 的单摆：

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad E_p(\theta) = -mgl\cos\theta,$$

$$\tfrac{1}{2}m\big(l\dot\theta\big)^2 = mgl\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot\theta_p(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{l}\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big)},$$

$$\frac{T_p}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta_p(\theta)}, \qquad \text{同理} \qquad \frac{T_C}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta_C(\theta)}.$$

> P 是参考单摆的摆球（挂在 O、摆长 l），C 是刚性杆的中点。两者沿同一条半径为 l 的圆弧运动、共用同一个 θ，差别只在速率法则——这正是本题要比的东西。
>
> **第一式**：单摆绕 O 作圆周运动故 $v = l\dot\theta$；取 O 为势能零点则 $E_p = -mgl\cos\theta$；自 θ_0 处静止释放，机械能守恒即 $\frac{1}{2}m(l\dot\theta)^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_0$，移项便是。解 $\dot\theta$ 时 m 与一个 l 约掉。要点在于：这样得到的是 $\dot\theta$ 作为 θ 的显函数——时间被消去了。
>
> **第二式**：由 $\dot\theta = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 分离变量得 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta/\dot\theta$；而从 θ_0 摆到 $\theta = 0$ 恰好是四分之一周期（整个循环 $\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0$ 由对称性分成四段等长），两端积分即得。这个积分本身是椭圆积分、算不出来，但根本不必算：因 $\dot\theta_C = \dot\theta_p/\sqrt{2}$ 对每个 θ 都成立，把常数提出后积分整个约掉，故 $T_C = \sqrt{2}\,T_p$ 对任意振幅都精确成立。$|\theta| \ll 1$ 只用在最后一步——把 T_p 写成 $2\pi\sqrt{l/g}$。

本题中只有 A 的高度随 θ 变化（B 在水平滑道上），故

$$E_p(\theta) = -m_A g\cdot 2l\cos\theta, \qquad \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = m_A g\cdot 2l\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big).$$

杆中点 C 满足 $\vec r_C = \frac{1}{2}(\vec r_B + \vec r_A)$，故 $\vec v_C = \frac{1}{2}(\vec v_A + \vec v_B)$；又 $\vec v_A \perp \vec v_B$，于是

$$\frac{v_A^2 + v_B^2}{4} = \vec v_C^{\,2} = l^2\dot\theta_C^2, \qquad \tfrac{1}{2}m\big(v_A^2 + v_B^2\big) = 2ml^2\dot\theta_C^2.$$

代入能量式得

$$\dot\theta_C = \sqrt{\frac{g}{l}\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big)} = \frac{\dot\theta_p}{\sqrt{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad T_C = \sqrt{2}\,T_p = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

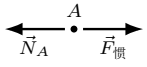
> 代入的是杆系统那条机械能守恒式——把它左边的动能用 $\dot\theta_C$ 换掉。取 $m_A = m_B = m$：
>
> $$\underbrace{\tfrac{1}{2}m\big(v_A^2 + v_B^2\big)}_{=2ml^2\dot\theta_C^2} = \underbrace{mg\cdot 2l\big(\cos\theta - \cos\theta_0\big)}_{=2mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)},$$
>
> 两边的 $2m$ 与一个 l 约掉，立得 $\dot\theta_C^2 = \frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$。
>
> **那个 $\sqrt{2}$ 从哪来。**在同一个 θ 处比两个系统的系数：势能项（驱动）大了 2 倍（A 下落的是 $2l\cos\theta$ 而非 $l\cos\theta$，B 在水平滑道上不贡献），动能项（惯性）却大了 4 倍（两个质量，且 $v_A^2 + v_B^2 = 4l^2\dot\theta_C^2$）。惯性翻了 4 倍而驱动只翻 2 倍，故 $\dot\theta^2$ 减半、$\dot\theta$ 小 $\sqrt{2}$ 倍、周期大 $\sqrt{2}$ 倍。

进一步分析：动力学角度. 对整个杆系统用质心运动定理，

$$\vec N_A + \vec N_B + (m_A + m_B)\vec g = \frac{\mathrm{d}\vec P}{\mathrm{d}t} = m_A\vec a_A + m_B\vec a_B \qquad \Longrightarrow \qquad \vec N_A = m_B\vec a_B.$$

而在 B 系中为 A 引入的平移惯性力为

$$-m_A\vec a_B = -m_A\frac{\vec N_A}{m_B},$$



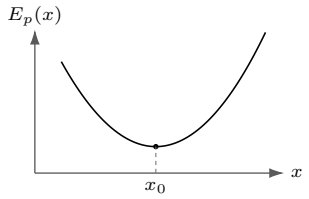
故 $\vec N_A + \vec N_{惯} \xrightarrow{m_A = m_B} 0$ ——约束力与惯性力恰好抵消，B 系中 A 的运动完全等价于摆长 $2l$ 的单摆。

第一式怎么来的：把质心运动定理投影到水平方向。A 被约束在竖直滑道上，滑道只能给它水平的 $\vec{N}_A$，而它的加速度 $\vec{a}_A$ 只能竖直；B 则反之。于是水平分量里 $\vec{N}_B$、重力、$m_A\vec{a}_A$ 三项全为零，只剩 $N_A = m_B a_B$。

第二式的用处：B 系以 $\vec{a}_B$ 平动，须为 A 补平移惯性力 $-m_A\vec{a}_B$；代入 $\vec{a}_B = \vec{N}_A/m_B$ 得 $-\frac{m_A}{m_B}\vec{N}_A$。当 $m_A = m_B$ 时它正好等于 $-\vec{N}_A$。

于是 B 系中 A 只剩重力与杆的拉力——把它钉在竖直滑道上的那个 $\vec{N}_A$ 被惯性力抵消干净了。而 B 系里 B 不动、杆长 $2l$，A 便在半径 $2l$ 的圆上只受重力驱动，正是一个摆长 $2l$ 的单摆，周期 $2\pi\sqrt{2l/g}$——与能量法所得完全一致。

若 $m_A \neq m_B$：能量法（$n_f = 1$，稳定平衡附近的微振动）． 取 x 为广义坐标，平衡位置 x_0 满足 $E_p'(x_0) = 0$。



在 x_0 附近展开，一次项因 $E_p'(x_0) = 0$ 而消失：

$$E_p(x) = E_p(x_0) + 0 + \tfrac{1}{2}E_p''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots, \qquad k \equiv E_p''(x_0) > 0,$$

k 为**刚性系数**。动能一般可写成 $E_k = \frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$，取 $a(x) = a(x_0) + \cdots$，

$$m \equiv a(x_0),$$

m 为**惯性系数**。

这一套是「任意单自由度系统在稳定平衡附近都作简谐振动」的通用做法；k、m 只是等效系数，未必对应真弹簧与真质量。

E_p **为什么展到二阶**：常数项无意义（势能零点任选）；一次项因 $E_p'(x_0) = 0$ 而为零——这正是「平衡」的定义。于是领头项就是二次项，形如弹簧势能 $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$。而 $k > 0$ 等价于 x_0 是极小点，即稳定（若在山顶则 $k < 0$，不是振动而是跑掉）。

E_k **为什么写成** $\frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$：单自由度时各质点位置都只是 x 的函数，速度便都正比于 $\dot{x}$，故

$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \underbrace{\tfrac{1}{2}\Big[\sum_i m_i\Big(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big]}_{a(x)}\dot{x}^2.$$

这里的 a 是个系数函数，与加速度无关；它一般依赖 x。量纲随广义坐标而变：x 取长度时 $[a]$ = 质量，x 取角度时 $[a]$ = 转动惯量。

为什么只取 $a(x_0)$：$(x - x_0)$ 与 $\dot{x}$ 都是一阶小量，$\dot{x}^2$ 已是二阶，再乘上 $a'(x_0)(x - x_0)$ 便成三阶，可丢。两边都只保留到二阶，恰好配平。

本例中 $a(\theta) = 4l^2(m_A\sin^2\theta + m_B\cos^2\theta)$，在 $\theta = 0$ 处只剩 $4m_Bl^2$：杆竖直时 $v_A = 2l\sin\theta\,\dot{\theta} \to 0$，$A$ 瞬时静止、动能全在 B；而势能的变化又全由 A 提供。这就是 $k \propto m_A$、$m \propto m_B$、$\omega^2 \propto m_A/m_B$ 的由来。

于是机械能守恒给出

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}k(x - x_0)^2 \approx \text{const.}$$

对 x 求导，并利用

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x},$$

即得**简谐**方程

$$m\ddot{x} + k(x - x_0) \approx 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

把能量式对 x（不是对 t）求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}k(x-x_0)^2\right]=0 \implies \tfrac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}+k(x-x_0)=0,$$

再用上面那条链式法则恒等式 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}x}=\ddot{x}$，即得。（对 t 求导也可以：$m\dot{x}\ddot{x}+k(x-x_0)\dot{x}=0$，约去 $\dot{x}$——但须排除 $\dot{x}=0$ 的转折点；对 x 求导则没有这个顾虑。）

记 $u=x-x_0$（x_0 是常数，故 $\ddot{u}=\ddot{x}$），方程化为 $\ddot{u}=-\frac{k}{m}u$，正是简谐方程 $\ddot{u}=-\omega^2u$；代入 $u=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较系数即得 $\omega=\sqrt{k/m}$、$T=2\pi\sqrt{m/k}$。

那个「$\approx$」来自能量式本身只准到二阶——丢掉的三阶项就是非谐效应，振幅一大就显出来（如单摆的周期随 θ_0 变）。

用到本例：取 θ 为广义坐标，

$$E_p(\theta)=-m_Ag\cdot 2l\cos\theta \longrightarrow m_Ag\cdot 2l(1-\cos\theta)=\tfrac{1}{2}\underbrace{\left(m_Ag\cdot 2l\right)}_{k}\theta^2+\cdots$$

（已把零点移到 $\theta=0$）。由**坐标变换方程**

$$x_B=2l\sin\theta,\qquad y_A=-2l\cos\theta,$$

$$v_B=\dot{x}_B=2l\cos\theta\cdot\dot{\theta},\qquad v_A=\dot{y}_A=2l\sin\theta\cdot\dot{\theta},$$

得

$$E_k=\tfrac{1}{2}\left(m_A\sin^2\theta+m_B\cos^2\theta\right)\cdot 4l^2\dot{\theta}^2=\tfrac{1}{2}\underbrace{\left(4m_Bl^2\right)}_{m}\dot{\theta}^2+\cdots,$$

故

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2m_Agl}{4m_Bl^2}}=\sqrt{\frac{m_Ag}{2m_Bl}}.$$

E_k 的**第一个等号只是提公因子**：把坐标变换方程代进 $E_k=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2$，

$$E_k=\tfrac{1}{2}m_A\left(2l\sin\theta\right)^2\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}m_B\left(2l\cos\theta\right)^2\dot{\theta}^2,$$

把 $\frac{1}{2}$、$4l^2$、$\dot{\theta}^2$ 三个公因子提出来，括号里剩下的正是 $m_A\sin^2\theta+m_B\cos^2\theta$。

第二个等号是取 $\theta\to 0$：$\sin^2 0=0$、$\cos^2 0=1$，括号只剩 m_B，故 $m=a(0)=4m_Bl^2$。「$+\cdots$」装的是 $\sin^2\theta\approx\theta^2$ 一类的修正，再乘 $\dot{\theta}^2$ 已是四阶，可丢。

末式纯是约分：$k=m_Ag\cdot 2l=2m_Agl$（来自上面势能的展开），除以 $m=4m_Bl^2$ 时约掉 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 与 $\frac{l}{l^2}=\frac{1}{l}$。量纲核对 $[m_Ag/(m_Bl)]=1/\mathrm{s}^2$ ✓；取 $m_A=m_B$ 得 $\omega=\sqrt{g/2l}$，即 $T=2\pi\sqrt{2l/g}$，与前两种解法一致。

3.5 碰撞

3.5.1 一维碰撞



$$(v_{10},v_{20})\xrightarrow{\text{过程}}(v_1,v_2).$$

刚性碰撞模型：$\Delta t\to 0$，$F_{\text{冲击力}}\to\infty$。两条推论：

1. 有限外力可略 $\implies$ **动量守恒**；
2. $W_{\text{内}}$ 不定——冲击内力是否做功被模型掩盖，故须另补一个能量方程。

1. 弹性碰撞. 机械能守恒，刚性模型下即 $E_k = E_{k0}$：

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{10} + m_2v_{20}, & ① \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2, & ② \end{cases}$$

方程组有两个解，其中之一是**初态解** $v_1 = v_{10}$、$v_2 = v_{20}$（相当于「没有发生碰撞」），按题意舍去，另一个即

$$v_1 = v_{10} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}(v_{20} - v_{10}), \qquad v_2 = v_{20} + \frac{2m_1}{m_1+m_2}(v_{10} - v_{20}).$$

> 初态解不是*增根*：把 (v_{10}, v_{20}) 代回①②两式残差严格为零，它是真解。也不是*重根*：两根一般互异（如 $m_1 = 1$、$m_2 = 2$、$v_{10} = 3$、$v_{20} = -1$ 时两根为 3 与 -2.333），只有退化情形 $v_{10} = v_{20}$ 才重合——而那本就没碰。
>
> 代数上：记 (I) $m_1(v_1 - v_{10}) = -m_2(v_2 - v_{20})$、(II) $m_1(v_1 - v_{10})(v_1 + v_{10}) = -m_2(v_2 - v_{20})(v_2 + v_{20})$，则 (II)÷(I) 给出③，*前提是* $v_1 \neq v_{10}$。被约掉的因子正是 $(v_1 - v_{10})$，故初态解恰是它的零点——走这条路是把它*丢掉*（失根），不是多出来。它是按*物理*舍去的，不是按代数。

于是

$$v_2 - v_1 = v_{20} - v_{10} + 2(v_{10} - v_{20}) = v_{10} - v_{20}, \qquad ③$$

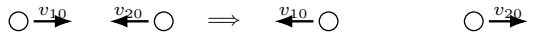
即**相对速度大小不变**。注意在动量守恒①的前提下③可替代②。由两体动能的分解

$$E_{k0} = \frac{P^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10} - v_{20})^2,$$

弹性碰撞保持的正是后一项——**资用能**一分未失。

> **资用能**就是 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{相对}}^2$，也即*质心系中的动能* E_k'（柯尼希定理）——碰撞*最多*能损失掉的那一份。
>
> 道理全在分解式里：刚性模型下动量守恒 $\Rightarrow$ P 不变 $\Rightarrow$ 第一项 $\frac{P^2}{2(m_1+m_2)}$ *被冻住*，一点也动不了，能损失的只剩第二项。换到质心系看更直白：那里 $P' = 0$，第一项为零，全部动能都是资用的。
>
> 三种碰撞无非是这份预算花掉多少：弹性时 $|v_2 - v_1| = |v_{10} - v_{20}|$，一分未花；非弹花掉 $1 - e^2$ 的份额，即下面的 $E_{k\text{损}} = (1-e^2)E_{\text{资用}}$；完全非弹末相对速度为零，花光。
>
> 这也顺带解释了③为何能替代②：第一项恒不变，而③正说第二项不变，两者合起来就是动能不变。

初末态对称与时间反演.



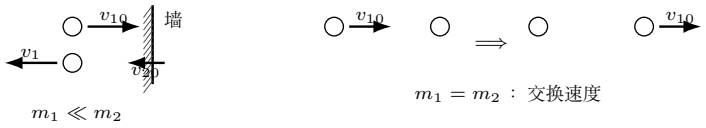
作时间反演 $t \to t' = -t$：

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r}, \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \to \vec{v}' = -\vec{v}, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \vec{a}' = \vec{a},$$

故 $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$，$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$ ——把所有箭头反向后仍是一个合法的碰撞过程。

> 这一行是在给上面那张「初末态对称」图*做依据*：把录像倒放，得到的仍是一个合法的碰撞过程。
>
> 规则只有一条——*每求一次* $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ *就翻一次号*。位置不含时间导数，$\vec{r}' = \vec{r}$（偶）；速度含一次，$\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}(-t)} = -\vec{v}$（奇）；加速度含两次，翻两次等于没翻，$\vec{a}' = \frac{\mathrm{d}(-\vec{v})}{\mathrm{d}(-t)} = \vec{a}$（偶）。
>
> 于是 $\vec{F}' = \vec{F}$、$\vec{E}' = \vec{E}$ ——牛顿第二定律*形式不变*，倒放的过程同样满足运动方程，所以把所有箭头反向后仍是一次合法的弹性碰撞。
>
> 注意这只对*弹性*碰撞成立：非弹性碰撞倒放意味着热量自发变回动能，不会发生——不可逆性正藏在刚性模型掩盖掉的那份耗散里。

两特例.



1. $m_1 \ll m_2$ ： 墙的速度改变量可忽略， $v_2 = v_{20}$ ， 由③得 $v_1 - v_2 = v_{20} - v_{10}$ ， 即 $v_1 = 2v_{20} - v_{10}$。
2. $m_1 = m_2$ ： $v_1 = v_{20}$ ， $v_2 = v_{10}$ ——两球交换速度。

2. 完全非弹性碰撞. 碰后一起运动，

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2},$$

资用能全部损失。

3. 非弹性碰撞. 补充方程为

$$v_2 - v_1 = e(v_{10} - v_{20}), \qquad 0 < e < 1,$$

e 称为**恢复系数**。动能损失

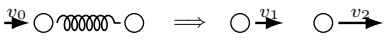
$$E_{k\text{损}} = E_{k0} - E_k = \tfrac{1}{2}\mu(v_{10} - v_{20})^2 - \tfrac{1}{2}\mu(v_2 - v_1)^2 = \tfrac{1}{2}\big(1 - e^2\big)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{20} - v_{10})^2,$$

即**动能损失公式**。

4. 其他： $e > 1$. 例如爆炸。一般地

$$W_{\text{内}} = \Delta\big(\tfrac{1}{2}\mu v_{\text{相对}}^2\big) = -E_{k\text{损}}.$$

可以设想冲击内力由一根弹簧承担（刚性模型相当于 $k \to \infty$ ）：



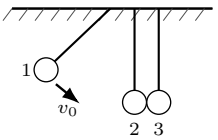
- 弹簧完全恢复 $\Longrightarrow$ 弹性碰撞；
- 完全不恢复（塑性） $\Longrightarrow$ 完全非弹；
- 部分恢复 $\Longrightarrow$ 非弹， e 描述恢复程度。

三体——一维正碰. 刚性模型给出

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = P_0,$$

完全非弹时 $v_1 = v_2 = v_3 = \dfrac{P_0}{m_1 + m_2 + m_3}$ ； 弹碰时补

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3 v_3^2 = E_{k0}.$$



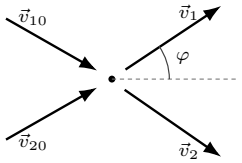
弹碰方程组无确定末态解——刚性模型抹去了相互作用细节。但 1、2 发生相互作用的距离远小于 2、3 的「紧密」程度，故实验室中的过程可近似看作两次两体正碰的接续：若 $\Delta t \neq 0$ ， 相应位移 $\Delta d \sim \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}v_0\Delta t \to 0$ ， 可以忽略。

为什么无定解：三个未知量却只有两个方程（动量 + 动能），欠定。取 m 相同、$v_0 = 1$，$(0,0,1)$、$(0,1,0)$、$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 都同时满足两式——方程本身挑不出哪个会发生。根源是刚性模型抹掉了相互作用细节，尤其是接触的*次序与时序*。

怎么定下来：实验室里接触并不同时。两球真正推挤的距离（约一个分子间距）远小于 2、3 之间的「紧密」程度（几个分子间距），故 1 撞 2 时 3 尚未参与，整个过程是*两次两体正碰的接续*：等质量交换速度两次，$(v_0,0,0)\to(0,v_0,0)\to(0,0,v_0)$ ——而两体问题是定解的。

那个 Δd 估计回应的疑问是：碰撞历时 Δt 内 2 球已经在动，会不会挤到 3 上去？由 $a\Delta t\sim v_0$ 得位移 $\Delta d\sim\frac{1}{2}v_0\Delta t\to 0$，可忽略，两次碰撞在时间上确实分得开。反过来若把 2、3 粘连成 $2m$ 的一体，算得 $v_1=-\frac{1}{3}v_0$、$v_{23}=\frac{2}{3}v_0$，结果完全不同——可见答案确实取决于被抹掉的那些细节。

3.5.2 二维斜碰



刚性模型只给出动量守恒

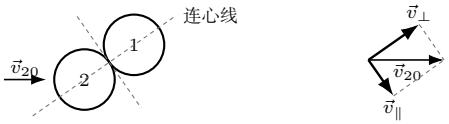
$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}.$$

完全非弹时 $\vec{v}_1=\vec{v}_2=\dfrac{\vec{P}}{m_1+m_2}$；弹碰时补

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2=E_{k0}.$$

但此时*仍无定解*——刚性模型不给作用力细节，点模型不给几何结构。补充条件可以是：给定 $\vec{v}_1$ 与固定参考方向的夹角 φ；或给出相互作用细节（如 α 粒子与原子核的库仑排斥）；或给出宏观几何结构，从而定出冲击力的方向。

例：两个相同的光滑刚性小球. ①静止，②以 $\vec{v}_{20}=\vec{v}$ 入射，完全弹性。沿连心线（法向 $\perp$）与切向 $\parallel$ 分解：



把 $\vec{v}_{20}$ 分解为 $\vec{v}_\parallel$ 与 $\vec{v}_\perp$。**切向**：接触面光滑、无切向冲量，两球的切向速度各自不变，

$$v_{2\parallel}=v_\parallel,\qquad v_{1\parallel}=0.$$

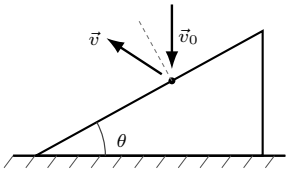
法向：是一维等质量弹碰，两球交换速度，故 $v_{1\perp}=v_\perp$、$v_{2\perp}=0$。合起来

$$\vec{v}_1=\vec{v}_\perp,\qquad \vec{v}_2=\vec{v}_\parallel.$$

若有动能损失，可引入**法向恢复系数** e：

$$v_{2\perp}-v_{1\perp}=e\big(v_{10\perp}-v_{20\perp}\big),\qquad 0\le e\le 1.$$

例：小球撞击固定斜面.



法向弹碰满足反射定律（历史上光的「微粒说」正是以弹性小球为模型）：

$$v_\parallel = v_0\sin\theta, \qquad v_\perp = v_0\cos\theta \qquad (\mu = 0).$$

引入摩擦 $f = \mu N$ 后 $v_\parallel$ 减少。法向冲量

$$I_N = \int_0^{\Delta t} N\ \mathrm{d}t = \bar{N}\Delta t = 2mv_0\cos\theta,$$

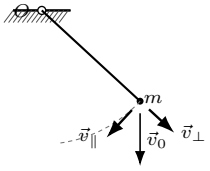
切向冲量 $I_f = \mu I_N = mv_0\sin\theta - mv_\parallel$ ，故

$$v_\parallel = v_0\sin\theta - 2\mu v_0\cos\theta, \qquad \mu < \tfrac{1}{2}\tan\theta.$$

> $I_f = \mu I_N$ **的关键**是 μ 为常数、可以提出积分号：
>
> $$I_f = \int_0^{\Delta t} \mu N\ \mathrm{d}t = \mu\int_0^{\Delta t} N\ \mathrm{d}t = \mu I_N.$$
>
> 这样就不必知道 $N(t)$ 的细节，只要它的积分——而 I_N 已由法向算出。注意 $I_N = 2mv_0\cos\theta$ 里那个 2 来自法向弹性反弹：速度是反向而非停住。
>
> **第二个等号**是切向的动量定理：摩擦反着滑动方向，切向动量由 $mv_0\sin\theta$ 减到 $mv_\parallel$ ，减少量即 I_f。两式消去 I_f 便得 $v_\parallel$。
>
> **那个条件**是解的自洽性要求：推导全程假定一直在滑（才有 $f = \mu N$ ）。要求 $v_\parallel > 0$ ，即 $v_0\sin\theta > 2\mu v_0\cos\theta$ ，便是 $\mu < \frac{1}{2}\tan\theta$。超过它，滑动中途就停、动摩擦随之消失，真实冲量 $< \mu I_N$ ，结果只能是 $v_\parallel = 0$ ——正是下一行所说。

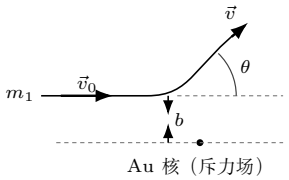
若 $\mu > \frac{1}{2}\tan\theta$ ，则 $v_\parallel = 0$ ，此时切向相对滑动消失、摩擦不再满额， $I_f \sim \int_0^{\Delta t} \mu N\ \mathrm{d}t < \mu I_N$。

例：不可伸长软绳.



绳绷直的瞬间，沿绳的 $\vec{v}_\perp$ 全部损失（完全塑性），只剩垂直于绳的 $\vec{v}_\parallel$ 进入圆弧轨道；小球不会回到原来的高度。机械能是否损失同样被模型掩盖，需作为补充条件。若绳换成弹性的，则成为抛体问题。

3.5.3 中心力场散射：碰撞截面



b 为**瞄准距离**， θ 为**散射角**。两类问题：已知力场可算出 $b = b(\theta)$ ；反之测得 $b = b(\theta)$ 即可反推力场信息。

设入射粒子束流强度 $I = \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}S_\perp} = \text{const}$。瞄准距离从 b 变到 $b + \mathrm{d}b$ 对应散射角从 θ 变到 $\theta + \mathrm{d}\theta$ ，而两者计数的是同一批粒子：

$$\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{入射}} = I\cdot 2\pi b\ \mathrm{d}b = \left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{出射}} = \sigma(\theta)\cdot I\cdot 2\pi\sin\theta\ \mathrm{d}\theta,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$。于是得到可测的**微分散射截面**

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|, \qquad \mathrm{d}\sigma = \sigma(\theta)\ \mathrm{d}\Omega,$$

以及**总散射截面** $\sigma_{\text{total}} = \int \sigma(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$。

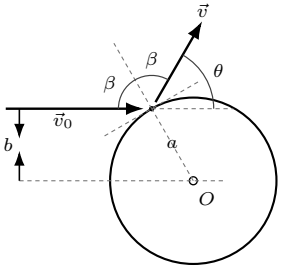
b（瞄准距离）与 θ（散射角）正文已定义。另外：φ 是绕入射轴的方位角，$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ 是立体角元（§2.2.2），I 是束流强度——单位时间、单位垂直截面积通过的粒子数。

公式从哪来：瞄准距离落在 $[b, b+\mathrm{d}b]$ 的粒子穿过一个*圆环*，面积 $2\pi b\,\mathrm{d}b$，每秒 $I\cdot 2\pi b\,\mathrm{d}b$ 个；它们必定出射到 $[\theta, \theta+\mathrm{d}\theta]$ 的*圆锥*内，该锥的立体角为 $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。两边数的是同一批粒子，令出射数 $= \sigma(\theta)\,I\,\mathrm{d}\Omega$，相等即得。

σ 的含义：$\mathrm{d}\sigma = \sigma\,\mathrm{d}\Omega$ 的量纲是*面积*——即「张开 $\mathrm{d}\Omega$ 的探测器所对应的等效靶面积」，它越大，落到那个方向的粒子越多。取绝对值是因为通常 b 越大偏折越小、$\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta < 0$，而截面必须为正。

为什么说「可测」：单个粒子的 b 根本量不出来，但各角度的*计数率*可以测，它直接给出 $\sigma(\theta)$；再反解 $b(\theta)$ 便得到力场信息——卢瑟福发现原子核走的正是这条路。

刚球势散射.



按反射定律，

$$\theta = \pi - 2\beta, \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad b = a\sin\beta = a\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \sigma(\theta) = \frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}a^2,$$

$$\sigma_{\text{total}} = \int_0^{\pi}\frac{1}{4}a^2\cdot 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi a^2.$$

第一步只是代入 $\sigma = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$：由 $b = a\cos\frac{\theta}{2}$，链式法则给 $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}$，绝对值把负号吃掉。

第二步用倍角公式 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$：

$$\sigma(\theta) = \frac{a\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{a^2}{4}.$$

$\sin\frac{\theta}{2}$ 与 $\cos\frac{\theta}{2}$ *全部约掉*，σ 竟与 θ 无关——刚球是*各向同性*散射。（对比库仑场的 $\sigma \propto 1/\sin^4\frac{\theta}{2}$，强烈前倾；卢瑟福正是据此判定原子核极小。）

第三步：σ 既是常数就可以提出积分号，$\sigma_{\text{total}} = \frac{a^2}{4}\oint\mathrm{d}\Omega = \frac{a^2}{4}\cdot 4\pi = \pi a^2$（笔记那一步是把 $\oint\mathrm{d}\Omega$ 写成 $\int_0^{\pi}2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi$）。

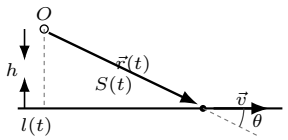
πa^2 恰是半径 a 的球的*几何截面*，合情合理：$b < a$ 的粒子悉数被挡下，$b > a$ 的全部擦身而过。

第四章　角动量

4.1　角动量定理

4.1.1　质点角动量定理

质点转动的描述依赖于参考点。如图，孤立质点沿直线 $l(t)$ 作匀速直线运动，对选定的参考点 O ，垂距 h 为常量：



由此可构造一个依赖参考点的守恒量——**面积速度**：

$$K=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{h}{2}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}=\frac{hv}{2}=\tfrac{1}{2}rv\sin\theta=\tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|,$$

$$\mathrm{d}\vec{S}=\tfrac{1}{2}\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r},\qquad \vec{K}=\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\tfrac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}.$$

据此引入**角动量**

$$\vec{L}=2m\vec{K}=m\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}.$$

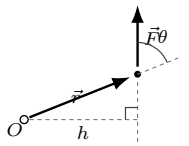
求导得

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{=0}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F},$$

引入**力矩** $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ ，即得**质点角动量定理**（亦称动量矩定理）

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},\qquad \int_t^{t+\Delta t}\vec{M}\ \mathrm{d}t=\Delta\vec{L}=\vec{L}(t+\Delta t)-\vec{L}(t),$$

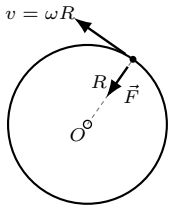
后者右端的时间累积称为**冲量矩**。应用时 $\vec{M}$ 与 $\vec{L}$ 必须取同一参考点。



$$M=rF\sin\theta=F\cdot h,$$

h 称为**力臂**。若过程中恒有 $\vec{M}\equiv 0$ ，则 $\vec{L}$ 守恒；若恒有 $M_z\equiv 0$ ，则 L_z 守恒。

例：匀速圆周运动.

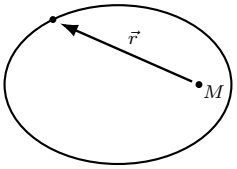


向心力始终指向圆心，故对 O 有 $\vec{M}\equiv 0$ ，

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=mvR\,\hat{z}=mR^2\omega\,\hat{z}$$

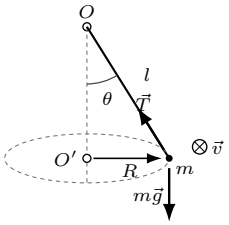
守恒。而相对圆心以外的任何参考点，角动量都不守恒。

例：开普勒定律.



开普勒第一定律说行星沿椭圆运动、太阳在一个焦点上；选该焦点 M 为参考点则 $\vec{M}\equiv 0$。开普勒第二定律即面积速度 $K=\text{const}$ ，正是 $\vec{L}$ 守恒。

例：圆锥摆.



小球在半径 $R=l\sin\theta$ 的水平圆上匀速率运动；图示时刻小球位于纸面内，速度 $\vec{v}$ 沿切向，故垂直纸面向里（图中 $\otimes$ ）。选悬挂点 O 为参考点，张力 $\vec{T}$ 沿 $\vec{r}$ 故无力矩，

$$\vec{M}=\vec{r}\times(m\vec{g}+\vec{T})=\vec{r}\times m\vec{g}=mgl\sin\theta\,\hat{n}\neq 0,$$

$\vec{L}$ 不守恒；但 $M_z\equiv 0$ ，故 L_z 守恒。把 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ （斜向上、随之旋转）分解，

$$\vec{L}=\vec{L}_z+\vec{L}_{xy},\qquad \vec{L}_z=mvl\sin\theta\,\hat{z}\ \text{（守恒）},\qquad \left|\vec{L}_{xy}\right|=mvl\cos\theta,$$

而 $\vec{L}_{xy}$ 随小球一同绕轴旋转，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{L}=\vec{\omega}\times\vec{L}_{xy}=L_{xy}\omega\,\hat{n}=mvl\omega\cos\theta\,\hat{n}.$$

> $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{A}$ 这条公式只对大小不变、*随刚体一起转*的矢量成立（即 §1.5 转动参考系里那一条）。$\vec{L}$ 正是这种矢量：小球匀速率绕轴转，$\left|\vec{L}\right|$ 不变，整个 $\vec{L}$ 以同一个 $\vec{\omega}$ 绕竖直轴旋转。
>
> 第二个等号：$\vec{L}_z\parallel\vec{\omega}$ ，叉乘为零，只剩 $\vec{L}_{xy}$ 那一份在变。第三个等号：$\vec{L}_{xy}\perp\vec{\omega}$ ，故大小就是 $L_{xy}\omega$ ；方向 $\hat{n}$ 垂直于 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{L}_{xy}$ 张成的竖直面，即切向——图示时刻正是那个 $\otimes$。末了代入 $\left|\vec{L}_{xy}\right|=mvl\cos\theta$。

由牛顿第二定律另行算出的向心力 $mg\tan\theta$ 乘力臂 $l\cos\theta$ ，给出 $mg\tan\theta\cdot l\cos\theta\,\hat{n}=\vec{M}$ ——两条路一致。若改选 O' 为参考点，则 $\vec{L}'=mvl\sin\theta\,\hat{z}$ 本身守恒。

$mg\tan\theta$ 出自两个分量方程：竖直 $T\cos\theta = mg$、水平 $T\sin\theta =$ 向心力，相除即得。力臂取 $l\cos\theta$，是因为合力 $m\vec{g}+\vec{T}$ 水平，而 O 就在它的作用线正上方 $l\cos\theta$ 处；乘起来 $mg\tan\theta\cdot l\cos\theta = mgl\sin\theta$，与 $\vec{r}\times m\vec{g}$ 算的分毫不差。但「一致」用到了圆锥摆条件 $\omega^2 l\cos\theta = g$，否则 $mvl\omega\cos\theta$ 与 $mgl\sin\theta$ 对不上。

换到 O'：$\vec{r}' = \vec{R}$ 水平、$\vec{v}$ 与它垂直，故 $\vec{L}' = mRv\,\hat{z}$ 纯沿竖直方向。守恒的根由是合力恰好向心（沿 $-\vec{R}$），对 O' 力矩为零。这个 $\vec{L}'$ 就是上面的 $\vec{L}_z$ ——两参考点之差 $\vec{OO'}\times\vec{p}$ 是「竖直叉水平」，正好是被丢掉的 $\vec{L}_{xy}$。

$\vec{M}=\dot{\vec{L}}$ 的两种效果.

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{L}\,\hat{L} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

——前一项改变大小，后一项旋转方向。两个特例：

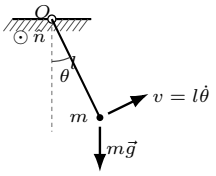
- $\dot{L}=0 \iff \vec{M}=\vec{\omega}\times\vec{L} \iff \vec{M}\perp\vec{L}$（只转方向）；
- $\vec{\omega}=0 \iff \vec{M}=\dot{L}\,\hat{L} \iff \vec{M}\parallel\vec{L}$（只改大小）。

任何矢量都能写成「大小 × 方向」$\vec{L}=L\,\hat{L}$，对它用乘积求导法则就得两项：$\dot{L}\,\hat{L}+L\dfrac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}t}$。

第二项为何一定能写成 $\vec{\omega}\times\vec{L}$：$\hat{L}$ 是单位矢量，$\hat{L}\cdot\hat{L}=1$ 两边求导给出 $\hat{L}\cdot\dot{\hat{L}}=0$，即 $\dot{\hat{L}}$ 必垂直于 $\hat{L}$ ——箭头尖只能在单位球面上走，而那正是「绕某根轴转」。取 $\vec{\omega}\equiv\hat{L}\times\dot{\hat{L}}$，用 $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ 的展开式即可验出 $\vec{\omega}\times\hat{L}=\dot{\hat{L}}$，再乘 L 便是 $\vec{\omega}\times\vec{L}$。

两项天生正交（一项 $\parallel\vec{L}$、一项 $\perp\vec{L}$），故「改大小」与「转方向」互不串台、拆法唯一，上面两个特例也就是这条正交性的直接读数。又因 $\vec{\omega}$ 沿 $\hat{L}$ 的分量叉乘后为零，绕 $\vec{L}$ 自转的那一份在这里根本看不见。

例：单摆.



选 O 为参考点，

$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g} = -mgl\sin\theta\,\hat{n}, \qquad \vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v} = mvl\,\hat{n} = ml^2\dot{\theta}\,\hat{n},$$

由 $\vec{M}=\dot{\vec{L}}$ 得

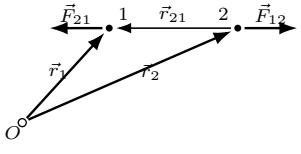
$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \xrightarrow{|\theta|\ll 1} -\frac{g}{l}\theta+\cdots, \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

4.1.2 质点系角动量定理

相对同一参考点 O，质点系角动量 $\vec{L}=\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i\vec{M}_i = \vec{M}_{\text{内}}+\vec{M}_{\text{外}}.$$

而一对内力的力矩和为零：



牛顿第三定律给出两条：

$$①\quad \vec{F}_{21}+\vec{F}_{12}=0,\qquad ②\quad \vec{F}_{21}\parallel\vec{r}_{21},$$

于是

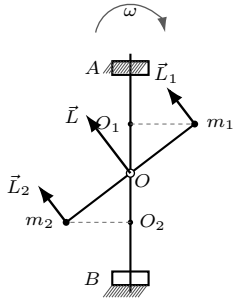
$$\vec{M}_{内}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{21}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{12}\xrightarrow{①}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{21}=\vec{r}_{21}\times\vec{F}_{21}\xrightarrow{②}0.$$

故得**质点系角动量定理**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{外}$$

（ $\vec{M}$ 与 $\vec{L}$ 取共同参考点）。**角动量守恒定律**：若 $\vec{M}_{外}=0$ 则 $\vec{L}$ 守恒；若 $M_{外,z}=0$ 则 L_z 守恒。

例：斜置哑铃. 两根轻杆连接关于 O 点对称的两小球（ $m_1=m_2=m$ ），在竖直排列的轴承 A、B 约束下绕竖直轴匀角速转动。角动量是否守恒?

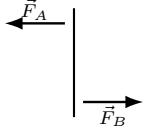


讨论守恒与否必须先讲清系统与参考点：

系统	参考点	$\vec{L}$ 守恒?
1	O_1	守恒（向心力指向 O_1 ）
2	O_2	守恒（同理）
$\{1,2,$杆$\}$	O_1 或 O_2	不守恒
$\{1,2,$杆$\}$	O	不守恒（ $\vec{L}_1$ 与 $\vec{L}_2$ 大小方向相同，合成后斜向上旋转）

> 两问其实是同一个代数事实。两球关于 O 对称， $\vec{r}_2=-\vec{r}_1$ ，于是 $\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i$ 也随之反号；而 $\vec{L}_i=m\vec{r}_i\times\vec{v}_i$ 里两个矢量同时变号，叉乘不变——所以 $\vec{L}_1=\vec{L}_2$ 不只是大小相等，方向也分毫不差，合成就是简单的二倍。
>
> 算出来 $\vec{L}_i=ma^2\big[\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\hat{u})\hat{u}\big]$ （ a 为球到 O 的距离、$\hat{u}$ 为杆方向），即 $\vec{\omega}$ 中垂直于杆的那一份：故 $\vec{L}$ 垂直于杆、落在「杆与转轴」张成的竖直面内，偏在轴的另一侧。杆与轴成 α ，这个垂直方向与轴便成 $90^\circ-\alpha$ ，而 $L_z=2ma^2\omega\sin^2\alpha>0$ ——这就是「斜向上」。杆一转它就跟着转，扫出锥面，故不守恒。

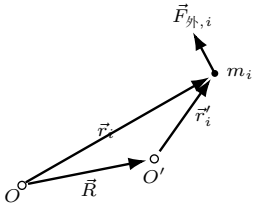
以 $\{1,2,$杆$\}$ 为系统、对 O 而言， $\vec{L}$ 斜向上且随体旋转，故不守恒。动力学上这要求轴承 A、B 提供一对水平力，以其力矩动态「平衡」掉 $\vec{L}$ 的变化，系统才不会在竖直面内翻倒（两小球重力对 O 的力矩本已相互抵消）。



由于质心静止， $\vec{F}_{合外}=0$ ，故 $\vec{F}_A=-\vec{F}_B$ ——这一对力构成**力偶**，其力矩和不依赖参考点。

4.1.3 有关外力矩的一些结论

力矩分解定理. 记 $\vec{R}=O\vec{O}'$。



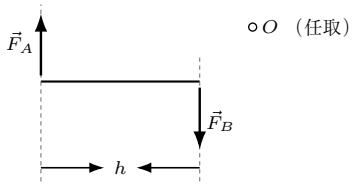
$$\vec{M}_{外,O} = \vec{M}_{外,O'} + \vec{R} \times \vec{F}_{合外}.$$

证：由 $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$ ，

$$\vec{M}_{外,O} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{M}_{外,O'} + \vec{R} \times \vec{F}_{合外}.$$

推论. 若 $\vec{F}_{合外} = 0$ ，则 $\vec{M}_{外}$ 不依赖于参考点。

力偶.



大小相等、方向相反而不共线的一对力称为**力偶**。因 $\vec{F}_{合} = 0$ ，其力矩和不依赖参考点，称**力偶矩**:

$$M_{力偶} = F \cdot h,$$

h 为两作用线的间距，即**力偶臂**。

总角动量与参考点. 与力矩分解定理平行地，

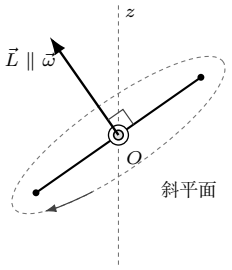
$$\vec{L}_{总,O} = \vec{L}_{总,O'} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}}.$$

若总动量 $\vec{P} = m\vec{v}_C = 0$ ，则 $\vec{L}$ 也不依赖参考点。

若把 O 换成光滑万向轴承，它便不能提供任何力矩，于是对 O 有 $\vec{M}_{外} \equiv 0$ （重力对 O 的力矩亦为零），角动量必须守恒。但这恰恰要求杆不再绕 z 轴转：转轴只能取垂直于杆的那个斜方向，杆在与该方向垂直的斜平面内转动。此时

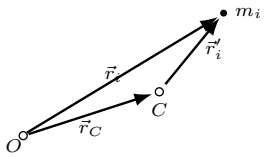
$$\vec{L} = 2ma^2\vec{\omega} \parallel \vec{\omega},$$

大小与方向都不变，角动量方才真正守恒；反之若仍强行绕 z 轴，就又需要 $\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L} \neq 0$ ，而光滑万向轴承给不出这个力矩。



4.1.4 质点系角动量分解定理

回顾动能的柯尼希定理 $E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + E_k'$ ——角动量也有完全平行的分解。



$$\vec{L}_{\text{总},O} = \vec{L}_{\text{对}C} + \vec{L}_{C\text{对}O}.$$

证：由 $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_C$ 加权求和，

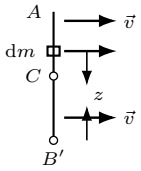
$$\sum_i m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i' + m\vec{r}_C \implies \sum_i m_i\vec{r}_i' = 0, \qquad \sum_i m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_C + \sum_i m_i\vec{v}_i' \implies \sum_i m_i\vec{v}_i' = 0,$$

> 两个零都不是新的物理，全来自质心的定义。定义式 $\vec{r}_C \equiv \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i$ 就是 $\sum_i m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_C$ ；把它代回左边那个恒等式，两边的 $m\vec{r}_C$ 一消，剩下的正是 $\sum_i m_i\vec{r}_i' = 0$。换个说法： $\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i'$ 就是质心在质心系中的位置 $\vec{r}_C'$ ，而质心系的原点本来就取在质心上，当然为零。
>
> 第二式是第一式对时间求导（ m_i 为常量，且质心系只平动不转，故 $\mathrm{d}\vec{r}_i'/\mathrm{d}t = \vec{v}_i'$ ），也就是 $\vec{P}' = m\vec{v}_C' = 0$ ——质心系里总动量恒为零。下面能把两个交叉项整个划掉，靠的就是这两式。

于是

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i &= \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_C) \times m_i(\vec{v}_i' + \vec{v}_C) \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \Big(\sum_i m_i\vec{r}_i'\Big) \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \Big(\sum_i m_i\vec{v}_i'\Big) \\ &= \vec{L}_{\text{对}C} + \vec{L}_{C\text{对}O}.\end{aligned}$$

例：整体平动的细杆. 质量 m、长 l 的匀质细杆竖直放置、整体以 $\vec{v}$ 水平平动，取下端 B' 为参考点。



$$L = \int \mathrm{d}m\, z\, v = \int_0^l \frac{m}{l} v\, z\, \mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}mvl = \underbrace{\vec{L}_{\text{对}C}}_{=0} + \underbrace{\vec{L}_{C\text{对}B'}}_{=\frac{l}{2}\cdot mv}.$$

纯平动时杆对自身质心的角动量为零，全部角动量都来自「质心对 B'」那一项。

4.1.5 质心系角动量定理

背景 S 系中 $\vec{F}_{\text{合外}} = m\vec{a}_C$ ，故质心系一般是非惯性系，角动量定理本应写成

$$\vec{M}_{\text{外}} + \vec{M}_{\text{惯}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}.$$

但**断言**：以质心 C 为参考点时 $\vec{M}_{\text{惯},\text{对}C} = 0$。证：

$$\vec{F}_{\text{惯},i} = -m_i\vec{a}_C, \qquad \vec{F}_{\text{合惯}} = -\Big(\sum_i m_i\Big)\vec{a}_C = -m\vec{a}_C,$$

故 $\vec{F}_{\text{合惯}}+\vec{F}_{\text{合外}}=0$ ，即质心系中 $\vec{P}'\equiv 0$ ；而

$$\vec{M}_{\text{惯}}=\sum_i \vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_C)=-\Big(\sum_i m_i\vec{r}_i'\Big)\times\vec{a}_C=-m\,\vec{r}_C'\times\vec{a}_C\xrightarrow{\vec{r}_C'=0}0.$$

于是即便质心系非惯性，对质心仍有

$$\vec{M}_{\text{外}}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{对}C}}{\mathrm{d}t}.$$

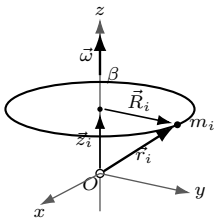
重心. 当 $\vec{g}=\text{const}$ 时，重力的动力学效果等效于全部集中作用于**重心**

$$\vec{r}_G=\vec{r}_C=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

- 重力势能： $\sum_i m_i g h_i=\big(\sum_i m_i h_i\big)g=mh_Cg$ ；
- 重力力矩： $\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{g}=\big(\sum_i m_i\vec{r}_i\big)\times\vec{g}=\vec{r}_G\times m\vec{g}$。

4.2 刚体定轴转动

取转轴为 z 轴， $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$ ，自由度 $n_f=1$。



4.2.1 转动惯量

把 $\vec{r}_i$ 分解为沿轴与垂直于轴的两部分，

$$\vec{r}_i=\vec{z}_i+\vec{R}_i,\qquad \vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_i=\vec{\omega}\times\vec{R}_i,\qquad v_i=\omega R_i,$$

（ $\vec{\omega}\times\vec{z}_i=0$ ，因二者共线）于是

$$E_k=\sum_i\tfrac{1}{2}m_iv_i^2=\tfrac{1}{2}\Big(\sum_i m_iR_i^2\Big)\omega^2=\tfrac{1}{2}I\omega^2,$$

其中 $I=\sum_i m_iR_i^2$ 称为**转动惯量**。

初看也许会想写 $\vec{L}\overset{?}{=}I\vec{\omega}$、$\vec{M}\overset{?}{=}I\vec{\beta}$ ——这两式都不成立。把角动量算清楚：

$$\vec{L}=\sum_i(\vec{z}_i+\vec{R}_i)\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{R}_i)=\vec{L}_z+\vec{L}_{xy},$$

其中（用 $\vec{R}_i\perp\vec{\omega}$ ）

$$\vec{L}_z=\sum_i\vec{R}_i\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{R}_i)=\sum_i m_iR_i^2\,\vec{\omega}=I\vec{\omega},$$

但还有 $\vec{L}_{xy}$ ：

$$\vec{L}_{xy}=\sum_i\vec{z}_i\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{R}_i)=-\Big(\sum_i m_iz_i\vec{R}_i\Big)\omega\neq 0\ \text{（一般而言）}.$$

这一项随刚体一同旋转，正是上一节斜置哑铃「$\vec{L}$ 斜向上旋转」的来历。

不过沿轴的分量是干净的：

$$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=I\beta$$

——即**定轴转动定理**，形式上与 $\vec{F}=m\vec{a}$ 平行。并且 M_z、L_z 不依赖于转轴上参考点的选取（只要仍取在同一条轴上）：

$$M_z=\sum_i\big\{(\vec{z}_i+\vec{R}_i)\times\vec{F}_i\big\}_z=\sum_i\big\{\vec{R}_i\times\vec{F}_i\big\}_z,$$

因为 $\vec{z}_i\times\vec{F}_i$ 没有 z 分量。故它们是对轴的量，而不只是对点的量。

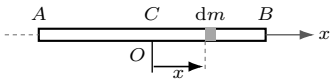
一般地，记 R 为质元到转轴的距离，

$$I=\sum_i m_iR_i^2=\sum_i m_i\big(x_i^2+y_i^2\big)\xrightarrow{\text{连续分布}}\int R^2\,\mathrm{d}m,$$

于是

$$E_k=\tfrac{1}{2}I\omega^2,\qquad \vec{L}=I\omega\,\hat{z}+\vec{L}_{xy}.$$

例：匀质杆 (m,l)**.**



沿杆取 x 轴，原点 O 取在质心 C。线密度为 m/l ，故长 $\mathrm{d}x$ 的一段质量 $\mathrm{d}m=\dfrac{m}{l}\,\mathrm{d}x$。

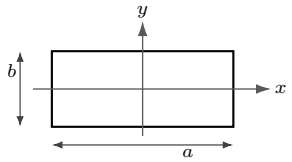
过 C 且垂直于杆的轴：质元到轴的距离 $R=|x|$ ，

$$I_C=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\,\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-l/2}^{l/2}=\frac{m}{l}\cdot\frac{1}{3}\cdot2\Big(\frac{l}{2}\Big)^3=\frac{1}{12}ml^2.$$

过端点 A 且垂直于杆的轴：改选 A 为原点， $x\in[0,l]$ ，

$$I_A=\int_0^l x^2\,\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ml^2>I_C.$$

例：匀质矩形板.

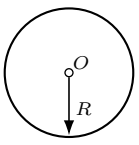


边长 a 沿 x、b 沿 y ，两轴过中心：

$$I_y=\tfrac{1}{12}ma^2,\qquad I_x=\tfrac{1}{12}mb^2$$

（把板切成平行于 x 轴的细条，每条都是绕中点转动的匀质杆，故 I_y 与杆的 I_C 同形； I_x 同理）。

例：匀质圆环 (m,R)**.** 绕过圆心 O、垂直于环面的轴：



环上每个质元到轴的距离都是 R ，

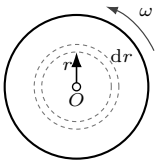
$$I_O=\int R^2\,\mathrm{d}m=R^2\int\mathrm{d}m=mR^2.$$

环上各点 $z_i=0$ ，故 $\vec{L}_{xy}=0$ ；以 $v=\omega R$ 记各点速率，

$$\vec{L}=mvR\,\hat{z}=mR^2\omega\,\hat{z},\qquad E_k=\tfrac{1}{2}I_O\omega^2=\tfrac{1}{2}mR^2\omega^2=\tfrac{1}{2}mv^2.$$

对匀质圆筒 (m,R) 绕其轴线，同样有 $I_O=mR^2$。

例：匀质圆盘、圆柱 (m,R)**.** 绕对称轴：



把盘切成一圈圈细环：半径 $r\to r+\mathrm{d}r$ 的细环面积为 $2\pi r\,\mathrm{d}r$ ，面密度为 $\dfrac{m}{\pi R^2}$ ，故

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\,r\,\mathrm{d}r.$$

细环上各点到轴的距离都是 r ，由上例它贡献 $r^2\,\mathrm{d}m$ ，于是

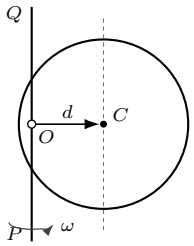
$$I_O=\int_0^R r^2\cdot\frac{2m}{R^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{1}{2}mR^2\equiv mR_{\text{回}}^2,$$

其中 $R_{\text{回}}=R/\sqrt{2}$ ：把质量 m 全部放在距轴 $R_{\text{回}}$ 处，转动惯量不变。比圆环的 mR^2 小——质量向中心集中了。相应地

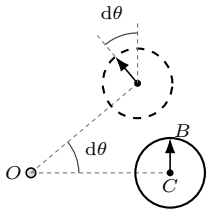
$$E_k=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}mR^2\omega^2=\tfrac{1}{2}m\big(\omega R_{\text{回}}\big)^2.$$

平行轴定理. 设轴 PQ 与过质心 C 的轴平行、相距 d ，则

$$I_{PQ}=I_C+md^2.$$



证：记 O 为 C 在 PQ 轴上的垂足，$\left|\vec{OC}\right|=d$。设刚体绕 PQ 轴以 ω 转动，这一运动可分解为随 C 的平动（$v_C=\omega d$）与绕 C 的转动（角速度仍为 ω）。经 $\mathrm{d}t$ ，刚体绕 O 转过 $\mathrm{d}\theta=\omega\,\mathrm{d}t$ ：



刚体上任一点 B 的速度

$$\vec{v}_C=\vec{\omega}\times\vec{OC},\qquad \vec{v}_B=\vec{\omega}\times\vec{OB}=\vec{\omega}\times\vec{OC}+\vec{\omega}\times\vec{CB}=\vec{v}_C+\vec{\omega}\times\vec{CB}$$

（用 $\vec{OB}=\vec{OC}+\vec{CB}$），后一项正是以同一个 $\vec{\omega}$ 绕 C 的转动（ω 一致）。由柯尼希定理，总动能 = 质心动能 + 质心系中的动能：

$$\tfrac{1}{2}I_{PQ}\,\omega^2=\tfrac{1}{2}md^2\omega^2+\tfrac{1}{2}I_C\,\omega^2,\qquad\forall\omega\quad\Longrightarrow\quad I_{PQ}=md^2+I_C.$$

故在一族平行轴中，过质心的转动惯量最小。回顾前面的匀质杆：

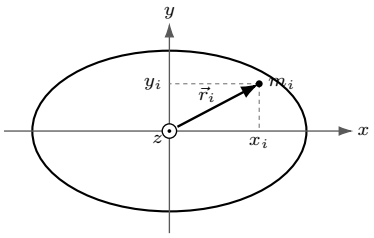
$$I_C=\tfrac{1}{12}ml^2,\qquad I_A=\tfrac{1}{12}ml^2+m\Big(\frac{l}{2}\Big)^2=\tfrac{1}{3}ml^2.$$

平动：刚体不转，各点速度时时相同，任一连线方向不变（轨迹可以是曲线）。「随 C 的平动」即设想刚体不转，各点都以 C 的速度 $\vec{v}_C$ 运动。

能这样拆，靠的就是上式 $\vec{v}_B=\vec{v}_C+\vec{\omega}\times\vec{CB}$：第一项对所有点相同，即随 C 的平动；第二项恰是刚体绕过 C 的平行轴以 ω 转动时 B 的速度。两项相加对每一点都成立，分解就成立。ω 不变，是因为连线 CB 本身也转过了 $\mathrm{d}\theta$（见上图）。

于是柯尼希定理两项各自好算：$\frac{1}{2}md^2\omega^2$ 与 $\frac{1}{2}I_C\omega^2$；对任意 ω 成立，系数必相等。

垂直轴定理. 适用于薄平板刚体。

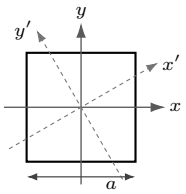


板面取作 xy 面，z 轴垂直板面向外；质元 m_i 的位矢 $\vec{r}_i$ 在板面内，$r_i^2=x_i^2+y_i^2$。薄板上 $z_i=0$，故质元到 x 轴的距离平方是 y_i^2、到 y 轴的是 x_i^2：

$$I_x=\sum_i m_iy_i^2,\qquad I_y=\sum_i m_ix_i^2,\qquad I_z=\sum_i m_i\big(x_i^2+y_i^2\big)=I_x+I_y.$$

对上面的矩形板：$I_x=\frac{1}{12}mb^2$，$I_y=\frac{1}{12}ma^2$，故 $I_z=\frac{1}{12}m\big(a^2+b^2\big)$。

正方板（边长 a）：



$$I_x=I_y=\tfrac{1}{12}ma^2,\qquad I_z=\tfrac{1}{6}ma^2.$$

把 x,y 轴在板面内绕 z 转到任意的 x',y'：正方板绕 z 转 90° 与自身重合，而这一操作把 x' 轴变成 y' 轴，故 $I_{x'}=I_{y'}$；又 $I_{x'}+I_{y'}=I_z$（垂直轴定理对板面内任一对正交轴都成立），所以

$$I_{x'}=I_{y'}=\frac{I_z}{2}=\tfrac{1}{12}ma^2.$$

n 阶旋转对称轴取作 z 轴：刚体绕它转过 $\theta_l=\dfrac{2\pi}{n}\,l$（$l=0,1,2,\cdots$）均与自身重合。

一般地，板面内过原点、方向角为 φ 的轴有 $I(\varphi)=\sum_i m_i\big(y_i\cos\varphi-x_i\sin\varphi\big)^2=\frac{I_z}{2}+A\cos(2\varphi+\delta)$，只含 2φ 的谐波。若 z 是 n 阶对称轴，必有 $I(\varphi+\frac{2\pi}{n})=I(\varphi)$；当 $n\geq 3$ 时 $\frac{4\pi}{n}$ 不是 2π 的整数倍，只能 $A=0$，即板面内任一过中心的轴都有 $I=\frac{I_z}{2}$（正三角形、正六边形……皆然）。$n=2$ 的长方板则不成立。

匀质球壳与匀质球 (m,R)，绕过球心 O 的轴：

$$\text{球壳：}\ I_O=\tfrac{2}{3}mR^2,\qquad \text{球：}\ I_O=\tfrac{2}{5}mR^2.$$

球壳. *垂直轴定理要求薄板，球壳不是，但可借同一做法。取 O 为原点，质元 m_i 在 (x_i,y_i,z_i)，$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$；它到 x 轴的距离平方是 $y_i^2+z_i^2$，其余同理：*

$$I_x=\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2),\quad I_y=\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2),\quad I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2).$$

三式相加， x_i^2, y_i^2, z_i^2 各出现两次；壳上每点 $r_i = R$：

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum_i m_i r_i^2 = 2R^2 \sum_i m_i = 2mR^2.$$

球壳绕过 O 的任何轴看都一样，故 $I_x = I_y = I_z = I_O$ ，于是 $3I_O = 2mR^2$。

实心球. 密度 $\rho = m/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$。把球切成一层层同心薄球壳，半径 r、厚 $\mathrm{d}r$ 的一层体积为 $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$：

$$\mathrm{d}m = \rho \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{3m}{R^3} r^2\,\mathrm{d}r.$$

这一层是质量 $\mathrm{d}m$、半径 r 的球壳，由上面结果 $\mathrm{d}I = \frac{2}{3}r^2\,\mathrm{d}m$。各层绕同一轴，转动惯量直接相加：

$$I_O = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 \cdot \frac{3m}{R^3} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^3}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^3}\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}mR^2.$$

4.2.2 动力学（刚体定轴转动）

1. 质心运动定理.

$$\vec{F}_{\text{合外}} = m\vec{a}_C, \qquad \vec{a}_C = R_C\beta\,\hat{\tau} + \omega^2 R_C\,\hat{n},$$

R_C 为质心到转轴的距离， $\hat{\tau}$、$\hat{n}$ 为质心圆轨道的切向与法向（指向转轴）单位矢量。

2. 动能定理. 刚体内力不做功， $W_{\text{内}} = 0$ ，

$$W_{\text{外}} = \Delta E_k, \qquad E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2.$$

记 θ 为刚体的转角。若外力保守， $\frac{1}{2}I\omega^2 + E_p(\theta) =$ 常量，由此得 $\omega^2 = f(\theta)$ ；再用链式法则

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\,\omega = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\theta}.$$

3. 转动定理.

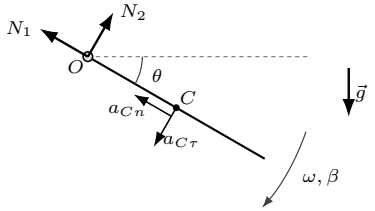
$$M_{\text{外},z} = I\beta.$$

4. 质心轴转动定理. 由质心参考点角动量定理（ §4.1.5 ），

$$\vec{M}_{\text{外},\text{对}C} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{对}C}}{\mathrm{d}t}, \qquad M_{\text{外},z,\text{对}C} = I_C\beta,$$

后者是前者沿「质心轴」（过 C 且平行于转轴）的分量。

例：细杆绕端点下摆. 匀质细杆 (m, l) 一端装在光滑水平轴 O 上，自水平位置静止释放；求杆转过 θ 时轴对杆的约束力 $N_1(\theta)$、$N_2(\theta)$。



θ 为杆与水平线的夹角； N_1 为约束力沿杆的分量（指向 O 一侧为正）， N_2 为垂直于杆的分量； a_{Cn}、$a_{C\tau}$ 为质心加速度的法向（沿杆指向 O ）与切向分量； $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ 为杆对 O 轴的转动惯量。

质心运动定理（ $R_C = \frac{l}{2}$ ）沿杆与垂直杆两个方向的分量式——重力沿杆向外的分量为 $mg\sin\theta$、垂直杆的分量为 $mg\cos\theta$：

$$N_1 - mg\sin\theta = ma_{Cn} = m\omega^2\frac{l}{2}, \qquad -N_2 + mg\cos\theta = ma_{C\tau} = m\beta\frac{l}{2}.$$

机械能守恒（质心下降 $\frac{l}{2}\sin\theta$ ）：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\,\omega^2 = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = 3\frac{g}{l}\sin\theta,$$

代入第一式， $N_1 = mg\sin\theta + m\cdot 3\frac{g}{l}\sin\theta\cdot\frac{l}{2}$ ，得

$$N_1 = \frac{5}{2}mg\sin\theta.$$

角加速度

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\cdot 3\frac{g}{l}\cos\theta = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta;$$

或由转动定理（重力对 O 的力矩为 $mg\frac{l}{2}\cos\theta$ ）： $mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}ml^2\beta$ ，同样 $\beta = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta$。

刚体绕 z 轴转过 $\mathrm{d}\vec{\theta} = \mathrm{d}\theta\,\hat{z}$ 时，质元的位移为 $\mathrm{d}\vec{r}_i = \mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{r}_i$ ，故外力的元功

$$\sum_i \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i\cdot\left(\mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{r}_i\right) = \left[\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i\right]\cdot\mathrm{d}\vec{\theta} = \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{\theta} \overset{\text{保守}}{=} -\mathrm{d}E_p(\theta)$$

（第二步用混合积的轮换 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$ ），于是

$$M = -\frac{\partial E_p(\theta)}{\partial\theta}.$$

> 上式说的是：转动中力的功就是「力矩 × 转角」，保守情形下力矩是势能对转角的负导数——与 $F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ 逐字对应， θ 扮演 x、M 扮演 F。

记号约定. 以下 L 为拉格朗日量（标量，等于动能减势能），与角动量 $\vec{L}$ 无关； $V(x)$ 为势能。

一维质点：

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

其中 $p = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}$ ，故上式即

$$m\ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F.$$

对上例的杆取 θ 为坐标： $E_k = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2$ ， $E_p = -mg\frac{l}{2}\sin\theta$ （以水平位置为势能零点），

$$L = E_k - E_p = \tfrac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}mgl\sin\theta.$$

广义动量 $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I_O\dot{\theta}$ ，方程给出

$$I_O\ddot{\theta} = \frac{\partial L}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}mgl\cos\theta,$$

即 $\beta = \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta$ ，与转动定理相同。

> **记号.** 点表示对时间求导： $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是速度， $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 是加速度。L 写成位置 x 与速度 $\dot{x}$ 的函数，求偏导时把二者当作两个独立变量： $\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}$ 是固定 x、只对 $\dot{x}$ 求导， $\frac{\partial L}{\partial x}$ 反之。
>
> **一维质点.** $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 不含 x ， $V(x)$ 不含 $\dot{x}$ ，故
>
> $$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} = p, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = F, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) = m\ddot{x}.$$
>
> 代回方程即 $m\ddot{x} = F$ ：拉格朗日方程就是换了写法的牛顿第二定律。
>
> **杆.** 坐标换成转角 θ ， $\dot{\theta} = \omega$ ，定轴转动动能为 $\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2$。质心在水平线下方 $\frac{l}{2}\sin\theta$ ，以水平位置为零点，势能为负： $E_p = -mg\frac{l}{2}\sin\theta$ ； $L = E_k - E_p$ 减负得正。同法求导：
>
> $$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = I_O\dot{\theta}\ (\text{对轴角动量}), \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = \tfrac{1}{2}mgl\cos\theta = M,$$
>
> 方程即 $I_O\ddot{\theta} = M$。θ 不是长度，故称「广义」动量、「广义」力；不做功的轴力根本不出现。

例（续）. 用质心轴转动定理求 N_2：对 C，重力无力矩，N_1 沿杆、作用线过 C 亦无力矩，只剩 N_2（力臂 $\frac{l}{2}$）：

$$N_2\cdot\frac{l}{2}=I_C\beta=\frac{1}{12}ml^2\cdot\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta=\frac{1}{8}mgl\cos\theta\quad\Longrightarrow\quad N_2=\frac{1}{4}mg\cos\theta.$$

另一方面，把质心运动定理的第二式乘以 $\frac{l}{2}$：

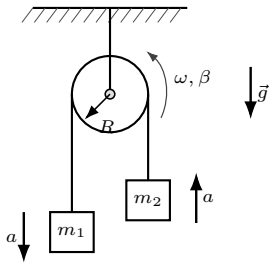
$$-N_2\frac{l}{2}+mg\cos\theta\cdot\frac{l}{2}=m\Big(\frac{l}{2}\Big)^2\beta,$$

左边两项依次是 $-I_C\beta$（质心轴转动定理）与 $I_O\beta$（对 O 的转动定理），故

$$-I_C\beta+I_O\beta=m\Big(\frac{l}{2}\Big)^2\beta,\qquad I_O-I_C=m\Big(\frac{l}{2}\Big)^2.$$

> 这一式就是第二式 $-N_2+mg\cos\theta=m\beta\frac{l}{2}$ 两边同乘 $\frac{l}{2}$，右边成为 $m\beta\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}=m(\frac{l}{2})^2\beta$。乘的 $\frac{l}{2}$ 是 O、C 间距，作用是把「力」变成「力 × 力臂 = 力矩」：
>
> - N_2 作用在 O、垂直于杆，对 C 的力臂为 $\frac{l}{2}$，$N_2\frac{l}{2}$ 是它对 C 的力矩，等于 $I_C\beta$；
> - 重力作用在 C，垂直杆的分量 $mg\cos\theta$ 对 O 的力臂为 $\frac{l}{2}$，$mg\cos\theta\cdot\frac{l}{2}$ 是重力对 O 的力矩，等于 $I_O\beta$（N_1、N_2 过 O，对 O 无力矩）。
>
> 所以末式不是新结论，而是自洽检验：三个定理并不独立，合起来恰是平行轴定理；求 N_2 时三选二即可。

例：定滑轮. 匀质圆盘定滑轮（质量 M、半径 R）可绕光滑水平轴转动，其上跨一轻绳，两端挂 $m_1>m_2$；求两物体加速度的大小 a。T_1、T_2 为两侧绳的张力，μ 为绳与滑轮间的摩擦因数，$\mu_{临}$ 为绳恰不打滑所需的摩擦因数。



$\mu=0$ 时，绳在轮上自由滑过，滑轮不起作用，两侧张力相等：

$$m_1g-T_1=m_1a,\qquad T_2-m_2g=m_2a,\qquad T_1=T_2,$$

前两式相加消去张力，$(m_1-m_2)g=(m_1+m_2)a$，

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,g.$$

或用能量：设 m_1 由静止下落 h（m_2 同时上升 h）获速率 v，

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=m_1gh-m_2gh\quad\Longrightarrow\quad v^2=\frac{2(m_1-m_2)gh}{m_1+m_2},\qquad a=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}h}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\,g$$

（与 $\beta=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}\theta}$ 同理：$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}h}=2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2a$）。

$\mu\ge\mu_{临}$ 时，绳与滑轮无相对滑动：Δt 内绳走过的长度等于轮缘转过的弧长，

$$\Delta l=v\Delta t=R\Delta\theta=R\omega\Delta t\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}v=\omega R\\ a=\beta R\end{cases}\qquad\text{（纯滚约束）}.$$

滑轮动能 $\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mv^2$，能量式成为

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}MR^2\omega^2=\tfrac{1}{2}\Big(m_1+m_2+\tfrac{1}{2}M\Big)v^2=(m_1-m_2)gh$$

$$\Longrightarrow\quad v^2=\frac{2(m_1-m_2)gh}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M},\qquad a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}.$$

或用力与力矩（滑轮对其轴的转动定理，$I=\frac{1}{2}MR^2$）：

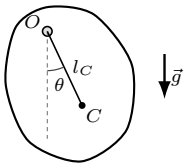
$$\begin{cases}m_1g-T_1=m_1a\\ T_2-m_2g=m_2a\\ (T_1-T_2)R=\frac{1}{2}MR^2\beta=\frac{1}{2}MRa\end{cases}$$

第三式即 $T_1-T_2=\frac{1}{2}Ma$；前两式相加再代入之，

$$(m_1-m_2)g=\Big(m_1+m_2+\tfrac{1}{2}M\Big)a.$$

> 有滑轮时 $T_1\neq T_2$：滑轮要获得角加速度，须有净力矩 $(T_1-T_2)R=I\beta$，这份张力差由轮缘的静摩擦提供（把轮与其上绳段视为整体，静摩擦是内力）。
>
> 能量法里滑轮相当于在分母上添了一份「等效质量」$I/R^2=\frac{1}{2}M$ ——因为 $\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^2$。$M\to 0$ 时退回 $\mu=0$ 的结果。

例：复摆. 刚体绕光滑水平轴 O 摆动，质心 C 到轴的距离为 l_C，θ 为 OC 与竖直线的夹角，I_O 为刚体对 O 轴的转动惯量。



重力对 O 的力矩为 $-mgl_C\sin\theta$（总使 θ 回零），由转动定理

$$I_O\ddot{\theta}=-mgl_C\sin\theta\ \xrightarrow{|\theta|\ll 1}\ -mgl_C\,\theta+\cdots,$$

小角下是简谐振动，圆频率

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl_C}{I_O}}\ \xrightarrow{I_O=ml_C^2}\ \sqrt{\frac{g}{l_C}}$$

（此处 ω 是振动的圆频率，不是转动角速度 $\dot{\theta}$；箭头右边是质量全部集中于 C 的特例——单摆）。能量法：

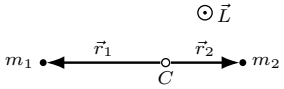
$$E_p(\theta)=mgl_C(1-\cos\theta)=\tfrac{1}{2}mgl_C\,\theta^2+\cdots,\qquad E_k=\tfrac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2.$$

> 能量法与 §3.4 微振动同一套路：$E=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl_C\theta^2$ 与弹簧振子 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ 逐项对应——惯性系数是 I_O、刚度是 mgl_C，故 $\omega=\sqrt{mgl_C/I_O}$。展开用的是 $\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2+\cdots$。

4.3 有心力场概述

4.3.1 两体有心力场

孤立两体 m_1、m_2，相互作用势能只依赖于两者间距，$E_p=E_p(r)$。取质心惯性系、以质心 C 为参考点：



记号约定. $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 为两体相对 C 的位矢；$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 为相对位矢（由 m_2 指向 m_1），$r=|\vec{r}|$；$\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 为约化质量；$\vec{L}$ 为角动量，$L=\Big|\vec{L}\Big|$。

$$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2,\qquad m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0$$

（后者即质心在原点）。两式联立解出

$$\vec{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r},\qquad \vec{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}\qquad\Longrightarrow\qquad m_1\vec{r}_1=\mu\vec{r},\quad m_2\vec{r}_2=-\mu\vec{r}.$$

机械能

$$E=\tfrac{1}{2}m_1\left|\dot{\vec{r}}_1\right|^2+\tfrac{1}{2}m_2\left|\dot{\vec{r}}_2\right|^2+E_p(r)=\tfrac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2+E_p(r)$$

（代入上式：$\frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left|\dot{\vec{r}}\right|^2=\frac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2$）。对 C 的总角动量

$$\vec{L}_{\text{对}C}=\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=m_1\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1+m_2\vec{r}_2\times\dot{\vec{r}}_2=\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_1-\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_2=\text{const.}$$

角动量守恒 $\Longrightarrow$ 轨道是平面曲线。

等式链. 从第二项读起：总角动量按定义是两体的 $m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i$ 之和；代入 $m_1\vec{r}_1=\mu\vec{r}$、$m_2\vec{r}_2=-\mu\vec{r}$ 得第三项；再提出 $\mu\vec{r}$，用 $\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_1-\dot{\vec{r}}_2$ 回到首项：

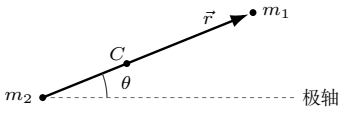
$$\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_1-\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_2=\mu\vec{r}\times\left(\dot{\vec{r}}_1-\dot{\vec{r}}_2\right)=\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}.$$

为何守恒. 孤立系无外力。m_2 对 m_1 的力 $\vec{F}$ 沿两体连线，$\vec{F}\parallel\vec{r}$；m_1 对 m_2 的力为 $-\vec{F}$。对 C 的总力矩

$$\vec{r}_1\times\vec{F}+\vec{r}_2\times(-\vec{F})=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}=0.$$

为何是平面. 叉积垂直于两个因子，故每一时刻都有 $\vec{L}\perp\vec{r}$。$\vec{L}$ 守恒，方向固定，于是 $\vec{r}$ 始终落在垂直于这一固定方向的平面内；$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 与 $\vec{r}$ 共线，也在此平面内。三维的 $\vec{r}$ 只剩平面内两个坐标，用极坐标 (r,θ) 即可。$\vec{L}=0$ 时 $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=0$，速度沿连线，两体只在一条直线上运动。

选 m_2 为极点、过 m_2 取一固定方向为极轴（下图虚线），在轨道平面内用极坐标 (r,θ)：$r=|\vec{r}|$ 为两体间距，θ 为 $\vec{r}$ 与极轴的夹角；质心 C 在两体连线上。



速度 $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$：

$$\vec{L}=\mu\vec{r}\times\left(\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)=\mu r^2\dot{\theta}\,\hat{z}$$

（$\hat{r}\times\hat{r}=0$，$\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}$），故 $\dot{\theta}=\dfrac{L}{\mu r^2}$。代入能量，$\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\mu r^2\cdot\frac{L^2}{\mu^2r^4}=\frac{L^2}{2\mu r^2}$：

$$E=\tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+E_p(r)\ \xrightarrow{\dot{\theta}=\frac{L}{\mu r^2}}\ \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2}+E_p(r)}_{\text{有效势}E_{p,\text{eff}}(r)}.$$

记号. $\dot{\vec{r}}$（带箭头）是相对速度矢量；$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$（不带箭头）是间距 r 的变化率，即径向速率。

速度平方. $\vec{r}=r\,\hat{r}$，$\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\,\hat{\theta}$，故 $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$。两分量互相垂直，由勾股定理

$$\left|\dot{\vec{r}}\right|^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2,$$

代入 $E=\frac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2+E_p(r)$ 即得箭头左边：径向动能 $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ 加横向动能 $\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2$。

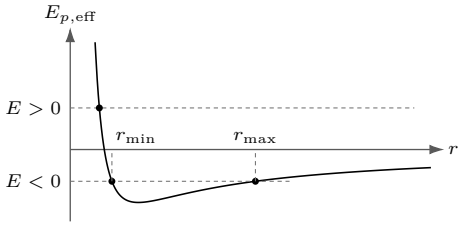
消去 $\dot{\theta}$. 用 $\dot{\theta}=L/\mu r^2$，横向动能化为 $\frac{L^2}{2\mu r^2}$。L 守恒，这一项只随 r 变，就像势能，故与 $E_p(r)$ 并成 $E_{p,\text{eff}}$：

$$E=\tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2+E_{p,\text{eff}}(r).$$

形式与一维运动「动能 + 势能」相同：二维轨道化成只看 r 的一维问题，θ 再由 $\dot{\theta}=L/\mu r^2$ 求出。

「有效」是说它并非真实势能：第一项其实是横向动能，只因 L 守恒才写成 r 的函数、当势能记账；它随 L 而变，每条轨道各有一条曲线；它只管 r 的运动。在随质点转动的参考系里，第一项正是离心势能（见下文），有效势即真实势能加离心势能。

折返点： $\dot r = 0$ ，即 $E = E_{p,\mathrm{eff}}(r)$ ，由此解出 $r_{\min}$ 或 $r_{\max}$。



$E = E_k + E_p(r) > 0$： 逃逸； $E < 0$： 束缚态。

> 把 $E = \frac12\mu\dot r^2 + E_{p,\mathrm{eff}}(r)$ 当作一维运动的能量式： $\frac12\mu\dot r^2 \ge 0$ ，故 r 只能处在 $E_{p,\mathrm{eff}}(r) \le E$ 的地方，取等号处 $\dot r = 0$ 即折返。
>
> **曲线形状.** 以引力 $E_p = -k/r$ 为例， $E_{p,\mathrm{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$ ，是正的第一项加负的第二项。「某项占优」指它的绝对值远大于另一项，两项之和约等于它。如取 $\frac{L^2}{2\mu} = k = 1$： $r = 0.1$ 时和为 $100 - 10$ ， $r = 10$ 时为 $0.01 - 0.1$。
>
> - $r \to 0$： $\frac{1}{r^2}$ 比 $\frac1r$ 涨得快，第一项占优，曲线升向 $+\infty$ ，像一堵墙，有限的 E 翻不过去，故 $L \neq 0$ 便撞不到一起，即离心势垒。
> - $r \to \infty$： $\frac{1}{r^2}$ 比 $\frac1r$ 衰减得快，第二项占优，曲线取负值并越来越贴近 0 ，即从下方趋于 0。
> - 两头之间，曲线从墙上降到负值再回升，最低处即阱底。
>
> **读图.** E 是一条横线， r 只能处在曲线低于横线处。$E > 0$： 曲线一过零就一直在 0 以下，横线只与墙交于一点 $r_{\min}$ ， r 无上界，一去不返； $E < 0$： 横线截出阱中一段 $[r_{\min}, r_{\max}]$ ， r 在其间往返； E 等于阱底： r 恒定，即圆轨道。

在随质点一同转动（角速度 $\omega = \dot\theta$ ）的参考系中，惯性离心力

$$\vec F_c = \mu\omega^2\vec r \quad\Longrightarrow\quad \mu\dot\theta^2 r\,\hat r = \frac{L^2}{\mu r^3}\,\hat r,$$

它对应的势能（取无穷远为零点）

$$E_{pc}(r) = \int_r^\infty \frac{L^2}{\mu r'^3}\,\mathrm{d}r' = -\frac{L^2}{2\mu r'^2}\bigg|_r^\infty = \frac{L^2}{2\mu r^2},$$

正是有效势中的第一项。

> **等式由来.** 惯性离心力 $\vec F_c = m\omega^2\vec r_\perp$ （ §2.3.3 ）， $\vec r_\perp$ 为位矢垂直于转轴的分量。这里转轴沿 $\hat z$ ，而 $\vec r$ 在轨道平面内、本身就垂直于转轴，故 $\vec r_\perp = \vec r$ ；相对运动等效于质量 μ 的单个质点， m 换成 μ。再依次代入：
>
> $$\omega = \dot\theta,\ \vec r = r\,\hat r: \quad \mu\dot\theta^2 r\,\hat r; \qquad \dot\theta = \frac{L}{\mu r^2}: \quad \mu\cdot\frac{L^2}{\mu^2 r^4}\cdot r = \frac{L^2}{\mu r^3}.$$
>
> **为何取 $\omega = \dot\theta$.** 在随质点一起转的参考系里质点只沿径向运动，径向方程 $\mu(\ddot r - r\dot\theta^2) = F(r)$ 可写成 $\mu\ddot r = F(r) + \mu\dot\theta^2 r$ ——多出的一项就是惯性离心力（科氏力等都沿切向，不进径向方程）。用 $\dot\theta = L/\mu r^2$ 消去 $\dot\theta$ 后它只依赖 r ，可写成势能 E_{pc} ；与 E_p 相加便是 $E_{p,\mathrm{eff}}$。

由两个守恒量解出

$$\dot\theta = \frac{L}{\mu r^2}, \qquad \dot r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - E_p(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\Big)}$$

（取 $\dot r > 0$ 的一支）。两式相除消去时间， $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \dot\theta/\dot r$ ，并用 $\mu\sqrt{2/\mu} = \sqrt{2\mu}$ ：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{L/r^2}{\sqrt{2\mu\Big(E - E_p(r) - \dfrac{L^2}{2\mu r^2}\Big)}}.$$

目标是轨道形状，即 θ 随 r 怎么变，与时间无关。

- $\dot\theta$：由 $L=\mu r^2\dot\theta$ 直接解出。
- $\dot r$：能量式移项得 $\frac12\mu\dot r^2=E-E_p(r)-\frac{L^2}{2\mu r^2}$，两边乘 $\frac{2}{\mu}$ 再开方。开方有 $\pm$ 两支，取 $+$（r 增大）。
- 相除：$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}t$ 约掉，意为「r 每增加一点，θ 转过多少」。分子分母同乘 μ：

$$\text{分子 }\frac{L}{\mu r^2}\cdot\mu=\frac{L}{r^2},\qquad \text{分母 }\mu\sqrt{\tfrac{2}{\mu}(\cdots)}=\sqrt{\mu^2\cdot\tfrac{2}{\mu}(\cdots)}=\sqrt{2\mu(\cdots)}.$$

对 r 积分即得 $\theta(r)$，也就是轨道。

4.3.2 比奈方程

另法：不对 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ 积分，而是直接写出轨道 $r(\theta)$ 满足的微分方程。

记号约定. $u=1/r$；$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$、$u''=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$（$u$ 上的撇号表示对 θ 求导）；$E_p'(r)=\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$（$E_p$ 上的撇号表示对 r 求导）；$F(r)=-E_p'(r)$ 为有心力的径向分量，$F>0$ 为斥力、$F<0$ 为引力（§1.3.3.1）。

能量式 $E=\frac12\mu\dot r^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}+E_p(r)$ 中 E、L 为常量，两边对 r 求导；其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(\frac12\dot r^2\big)=\dot r\frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}t}=\ddot r$：

$$0=\mu\ddot r-\frac{L^2}{\mu r^3}+E_p'(r)\quad\Longrightarrow\quad\mu\ddot r=\frac{L^2}{\mu r^3}-E_p'(r).$$

因 $\frac{L^2}{\mu r^3}=\mu r\dot\theta^2$（$L=\mu r^2\dot\theta$）、$-E_p'(r)=F(r)$，这正是径向的牛顿第二定律

$$\mu\big(\ddot r-r\dot\theta^2\big)=\mu a_r=F(r).$$

再换成以 θ 为自变量、以 $u=1/r$ 为未知函数。由 $\dot\theta=\frac{L}{\mu r^2}$，对时间求导可换成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$；又 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$，故

$$\dot r=\frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{L}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta},\qquad\ddot r=\frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(-\frac{L}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\Big)=-\frac{L^2}{\mu^2}u^2u''(\theta).$$

代入 $\mu\ddot r=\frac{L^2}{\mu r^3}-E_p'(r)$，并用 $\frac{L^2}{\mu r^3}=\frac{L^2}{\mu}u^3$：

$$-\frac{L^2}{\mu}u^2u''=\frac{L^2}{\mu}u^3-E_p'(r),$$

移项即得**比奈方程**

$$-\frac{L^2}{\mu}u^2\big(u''+u\big)=F\big(u^{-1}\big).$$

作用. 消去时间的牛顿第二定律：左边是 $\mu(\ddot r-r\dot\theta^2)$ 改写成对 θ 求导，右边是力；未知量是轨道形状 $u(\theta)$，不再是 $r(t)$、$\theta(t)$。

检验. 圆轨道 u 为常量，$u''=0$：$F=-\frac{L^2}{\mu r^3}=-\frac{\mu v^2}{r}$（$L=\mu rv$），正是向心力。

用法. 已知力求轨道：平方反比力代入得 $u''+u=$ 常量，形如简谐振动（θ 当时间），解出圆锥曲线（§4.4.1）；反过来，已知轨道代入左边可求力。

4.4 Kepler 问题

记号约定. 本节 $E_p(r)=-\alpha/r$，α 为力常量；μ、L、E、$u=1/r$、$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ 同 §4.3。A 在比奈方程的通解中是振幅（积分常量），从 (1) 起改指轨道的半长轴（椭圆）或半实轴（双曲线）；B 为半短轴（半虚轴），C 为轨道中心到焦点的距离（不是质心）。

4.4.1 轨道方程

两体相互作用取平方反比型：

$$E_p(r)=-\frac{\alpha}{r},\qquad \alpha=\begin{cases}Gm_1m_2 & \text{（万有引力），}\\ -kq_1q_2 & \text{（库仑力，}k\text{ 为静电力常量），}\end{cases}$$

径向力 $F(r)=-E_p'(r)=-\dfrac{\alpha}{r^2}=-\alpha u^2$。代入比奈方程：

$$-\frac{L^2}{\mu}u^2\big(u''+u\big)=-\alpha u^2\quad\Longrightarrow\quad u''+u=\frac{\mu\alpha}{L^2}.$$

这是常系数线性方程（简谐振动方程加一个常数项），通解为

$$u(\theta)=A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{\mu\alpha}{L^2},\qquad A\ge 0$$

（A、θ_0 为积分常量；A 的正负可并入 θ_0，$A=0$ 即圆轨道）。选特定极轴方向，使 $\theta_0=0$ ——即极轴指向 u 最大、r 最小的点（引力场中即近日点）。再定义两个非负常量

$$p=\frac{L^2}{\mu\,|\alpha|}>0,\qquad e=pA\ge 0.$$

由 $\frac{\mu\alpha}{L^2}=\frac{\alpha}{|\alpha|}\cdot\frac{\mu|\alpha|}{L^2}=\frac{\alpha}{|\alpha|}\cdot\frac{1}{p}$，通解化为

$$u=A\cos\theta+\frac{1}{p}\frac{\alpha}{|\alpha|}=\frac{\frac{\alpha}{|\alpha|}+e\cos\theta}{p},\qquad r=\frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+e\cos\theta},$$

其中 $\alpha/|\alpha|=+1$（引力）或 -1（斥力）。e 称**偏心率**。

> **公式含义.** 以引力 $\alpha>0$ 为例，$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 是以力心 m_2 为极点的轨道方程：朝与近日点方向成 θ 角的方向看，m_1 到 m_2 的距离就是 r。让 θ 转一圈，各方向的 r 连起来就是轨道：$\theta=0$ 最近，$r=\frac{p}{1+e}$；$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $r=p$；$\theta=\pi$ 最远，$r=\frac{p}{1-e}$。它只给轨道形状，不给何时到达何处。
>
> p：**轨道大小.** $u=\frac{1}{p}(1+e\cos\theta)$ 随 θ 起伏的平均值是 $\frac{1}{p}$。$e=0$ 时 $r\equiv p$：p 就是同一 L 下圆轨道的半径（即有效势阱底），L 越大轨道越大。
>
> e：**偏离圆的程度.** $e=A\big/\frac{1}{p}$ 是 u 的振幅与平均值之比，即相对起伏。$e=0$ 为圆；e 越大，轨道越扁（近、远两端差得越多）；$e\ge 1$ 时分母可为零，r 可趋于无穷，轨道不闭合。

$\alpha>0$ 时 $r(1+e\cos\theta)=p$。换成直角坐标：以极点为原点、极轴为 x 轴，把 $r=\sqrt{x^2+y^2}$、$r\cos\theta=x$ 代入得

$$\sqrt{x^2+y^2}+ex=p\quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2=e^2x^2-2pex+p^2,$$

即 $(1-e^2)x^2+2pex+y^2=p^2$。这是圆锥曲线，按 x^2 的系数 $1-e^2$ 为正、零、负分为

$$\begin{cases}e<1\text{：椭圆} & (E<0\text{，束缚态}),\\ e=1\text{：抛物线} & (E=0),\\ e>1\text{：双曲线的一支} & (E>0\text{，逃逸}).\end{cases}$$

括号中的能量判据来自偏心率与能量的关系

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}.$$

证明：用 $\dot r=-\frac{L}{\mu}u'$（§4.3.2）把能量写成 u 的函数，各项依次为 $\frac{1}{2}\mu\dot r^2=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}u'^2$，$\frac{L^2}{2\mu r^2}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}u^2$，$\frac{\alpha}{r}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\cdot\frac{2\mu\alpha}{L^2}u$；再配方：

$$E=\tfrac{1}{2}\mu\dot r^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\Big(u'^2+u^2-\frac{2\mu\alpha}{L^2}u\Big)=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\Big(\underbrace{u'^2+\Big(u-\frac{\mu\alpha}{L^2}\Big)^2}_{A^2}-\Big(\frac{\mu\alpha}{L^2}\Big)^2\Big).$$

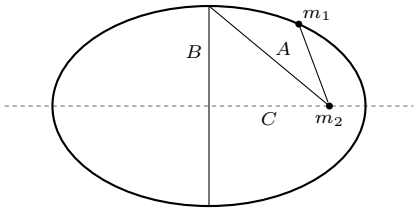
由通解，$u-\frac{\mu\alpha}{L^2}=A\cos\theta$、$u'=-A\sin\theta$，平方和恰为 A^2。又 $A=\frac{e}{p}=e\,\frac{\mu|\alpha|}{L^2}$，即 $A^2=e^2\big(\frac{\mu\alpha}{L^2}\big)^2$，故

$$E=\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\Big(\frac{\mu\alpha}{L^2}\Big)^2(e^2-1)\quad\Longrightarrow\quad e^2=1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}.$$

4.4.2 引力场中的轨道

(1) $\alpha>0$，引力场.

1) $e<1$，椭圆. $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$，$m_2$ 位于焦点。



A 为半长轴，B 为半短轴，C 为中心到焦点 m_2 的距离；短轴端点到两焦点等距、距离之和为 $2A$，故它到 m_2 的距离为 A，

$$B^2=A^2-C^2.$$

近日点（$\theta=0$）与远日点（$\theta=\pi$）到 m_2 的距离分别为 $A-C$、$A+C$：

$$\begin{cases}\dfrac{p}{1+e}=A-C,\\[2mm] \dfrac{p}{1-e}=A+C\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}e=\dfrac{C}{A},\\[2mm] p=A\big(1-e^2\big)=\dfrac{B^2}{A}\end{cases}$$

两式相除得 $\frac{1+e}{1-e}=\frac{A+C}{A-C}$，即 $e=\frac{C}{A}$；代回第一式得 $p=A(1-e)(1+e)$；再用 $B^2=A^2-C^2=A^2(1-e^2)$ 得 $p=\frac{B^2}{A}$。p 是**（半）正交弦**：过焦点 m_2 作长轴的垂线，交椭圆所得弦长的一半（$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $r=p$）。

把 p 的几何表达式与动力学表达式 $p=\frac{L^2}{\mu|\alpha|}$、$1-e^2=-\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$ 对上：

$$p=A\big(1-e^2\big)=A\Big(-\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}\Big)=\frac{L^2}{\mu\alpha}\quad\Longrightarrow\quad E=-\frac{\alpha}{2A};\qquad p=\frac{B^2}{A}=\frac{L^2}{\mu\,|\alpha|}\quad\Longrightarrow\quad L=\sqrt{\frac{\mu\alpha}{A}}\,B.$$

> **只用两个守恒量.** 近日点、远日点速度都垂直于长轴，力臂即到 m_2 的距离 $A\mp C$，由 $L=\mu v\cdot$力臂：
>
> $$v_1=\frac{L}{\mu(A-C)},\qquad v_2=\frac{L}{\mu(A+C)}.$$
>
> 代入能量守恒 $\frac12\mu v_1^2-\frac{\alpha}{A-C}=\frac12\mu v_2^2-\frac{\alpha}{A+C}$，动能移到左边、势能移到右边：
>
> $$\frac{L^2}{2\mu}\Big[\frac{1}{(A-C)^2}-\frac{1}{(A+C)^2}\Big]=\alpha\Big[\frac{1}{A-C}-\frac{1}{A+C}\Big].$$
>
> 用 $(A-C)(A+C)=B^2$ 通分，两个方括号依次为 $\frac{4AC}{B^4}$、$\frac{2C}{B^2}$，故 $L^2=\frac{\mu\alpha}{A}B^2$，开方取正。例题中 $M\gg m$，$\mu\approx m$，即写作 $\sqrt{m\alpha/A}\,B$。
>
> **正文的推法.** 同一个 p 的两种写法相等：$\frac{B^2}{A}=\frac{L^2}{\mu\alpha}$，结果相同。$E$ 同理：把 $1-e^2=-\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$ 代入 $p=A(1-e^2)$ 并约掉 L^2。

检验——匀速圆周运动（$A=R$；$M\gg m$，$\mu\approx m$）：

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{\alpha}{R^2}\quad\Longrightarrow\quad\tfrac12 mv^2=\frac{\alpha}{2R},\qquad E=\tfrac12 mv^2-\frac{\alpha}{R}=-\frac{\alpha}{2R}.$$

> 用最熟悉的特例核对刚得到的 $E=-\frac{\alpha}{2A}$。圆是 $e=0$ 的椭圆，$A=B=R$。$M\gg m$ 时太阳近似不动，$\mu\approx m$。
>
> - 第一式：引力 $\frac{\alpha}{R^2}$ 提供向心力 $m\frac{v^2}{R}$；两边乘 $\frac{R}{2}$ 得动能 $\frac{\alpha}{2R}$。
> - 第二式：总能量 = 动能 + 势能，得 $-\frac{\alpha}{2R}$。势能 $-\frac{\alpha}{R}$ 即 §4.4.1 开头的 $E_p(r)=-\frac{\alpha}{r}$ 取 $r=R$：以无穷远为零点，引力把物体往里拉，越靠近力心势能越低，故为负。
>
> 与 $E=-\frac{\alpha}{2A}$ 取 $A=R$ 一致，说明公式没错。

以下太阳质量为 M、行星质量为 m，$\alpha=GMm$，$\mu=\frac{Mm}{M+m}$。

开普勒第一定律：行星轨道为椭圆，太阳位于一个焦点。由上面的轨道方程，它推广为：平方反比引力下的轨道是圆锥曲线，太阳位于焦点；行星 $E<0$ ，故为椭圆。

开普勒第二定律：面积速度 $K=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2\mu}$ （ §1.3.3.2 ，质量换成约化质量 μ ）为常量，

$$K=\frac{L}{2\mu}=\sqrt{\frac{\alpha}{\mu A}}\cdot\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{G(M+m)}{A}}\cdot\frac{B}{2},\qquad \frac{\alpha}{\mu}=\frac{GMm}{\frac{Mm}{M+m}}=G(M+m).$$

开普勒第三定律：周期 T 等于椭圆面积 πAB 除以面积速度，

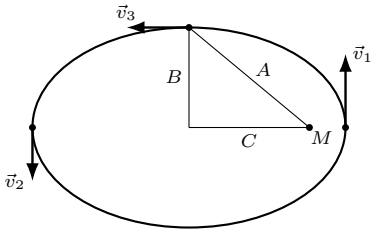
$$T=\frac{\pi AB}{K}=\frac{2\pi}{\sqrt{G(M+m)}}A^{3/2}\xrightarrow{M\gg m}\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}A^{3/2}.$$

即 $M\gg m$ 近似下公式里的 GM ，精确地应换成

$$GM\longrightarrow\frac{GMm_{\text{引}}}{m_{\text{惯}}}=\frac{GMm}{\frac{Mm}{m+M}}=G(M+m)\,:$$

引力 $\frac{GMm}{r^2}$ 中的 m 是行星的引力质量 $m_{\text{引}}$ ，而相对运动方程中与加速度相乘的惯性质量是约化质量 $m_{\text{惯}}=\mu$ （ $m_{\text{引}}$、$m_{\text{惯}}$ 见 §2.2.2 ）。

例. 已知椭圆轨道的 A、B、C ， $M\gg m$ （ $\mu\approx m$ ， $\alpha=GMm$ ）；求行星在近日点、远日点、短轴端点的速率 v_1、v_2、v_3。



三点到 M 的距离依次为 $A-C$、$A+C$、A。近日点、远日点处速度垂直于长轴，力臂即该距离；短轴端点处速度平行于长轴，力臂是 M 到这条速度线的垂直距离 B。

方法一：守恒方程. 角动量守恒（并用 $L=\sqrt{m\alpha/A}\,B$ ）与机械能守恒：

$$mv_1(A-C)=mv_2(A+C)=mv_3B=\sqrt{\frac{m\alpha}{A}}\cdot B,$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{A-C}=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{A+C}=\tfrac{1}{2}mv_3^2-\frac{GMm}{A}.$$

方法二：公式法. 由 $L=\sqrt{m\alpha/A}\,B$ 直接得

$$v_1=\frac{B}{A-C}\sqrt{\frac{\alpha}{mA}},\qquad v_2=\frac{B}{A+C}\sqrt{\frac{\alpha}{mA}},\qquad v_3=\sqrt{\frac{\alpha}{mA}},$$

代入 $\alpha=GMm$ ：

$$v_1=\frac{B}{A-C}\sqrt{\frac{GM}{A}},\qquad v_2=\frac{B}{A+C}\sqrt{\frac{GM}{A}},\qquad v_3=\sqrt{\frac{GM}{A}};$$

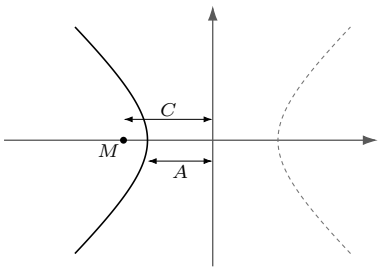
v_3 亦可由 $E=-\frac{\alpha}{2A}$ 得： $\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{GMm}{A}=-\frac{GMm}{2A}$。

> L 已知，每点只需「$L=mv\times$ 力臂」一步： $v=\frac{L}{m\cdot\text{力臂}}$ ，三点力臂依次为 $A-C$、$A+C$、B （见上）。再用
>
> $$\frac{L}{m}=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m\alpha}{A}}\,B=\sqrt{\frac{\alpha}{mA}}\,B,$$
>
> 得 $v_1=\frac{B}{A-C}\sqrt{\frac{\alpha}{mA}}$、$v_2=\frac{B}{A+C}\sqrt{\frac{\alpha}{mA}}$ ； v_3 处力臂恰为 B ，与分子的 B 约掉。方法一列的是方程组，这里 L 已求出，故不必再用能量式。

方法三. 近日点处速度与引力垂直，引力全部充当法向力；该处轨道的曲率半径 $\rho=\frac{B^2}{A}$ ：

$$m\frac{v_1^2}{\rho}=\frac{GMm}{(A-C)^2},\quad \rho=\frac{B^2}{A}\quad\Longrightarrow\quad v_1=\frac{B}{A-C}\sqrt{\frac{GM}{A}}.$$

2) 双曲线轨道： $e>1$ ， $E>0$.



A 为半实轴（中心到顶点）， C 为中心到焦点 M 的距离， B 为半虚轴；图中实线为轨道，即包围焦点 M 的那一支。近日点（ $\theta=0$ ）到 M 的距离为 $C-A$ ：

$$B^2=C^2-A^2,\qquad e=\frac{C}{A}>1,\qquad \frac{p}{1+e}=C-A=A(e-1),$$

$$p=A\big(e^2-1\big)=\frac{B^2}{A}=\frac{L^2}{\mu\alpha}=A\Big(\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}\Big)\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}L=\sqrt{\dfrac{\mu\alpha}{A}}\cdot B,\\ E=\dfrac{\alpha}{2A}>0.\end{cases}$$

连等式共四项，逐项来：

- $p=A(e^2-1)$ ： 上一行 $p=(1+e)\cdot A(e-1)$。
- $=\frac{B^2}{A}$ ： 代入 $e=\frac{C}{A}$ ， $A(e^2-1)=\frac{C^2-A^2}{A}=\frac{B^2}{A}$。
- $=\frac{L^2}{\mu\alpha}$ ： §4.4.1 的定义，引力 $|\alpha|=\alpha$。
- $=A\cdot\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$ ： 由 $e^2=1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$ 移项， $e^2-1=\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$。

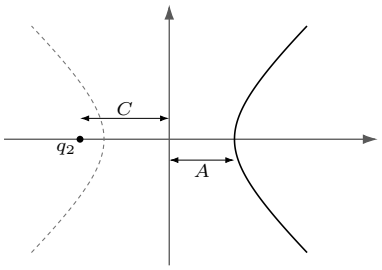
第二、三项相等解出 L （同椭圆）；第三、四项相等，两边除以 $\frac{L^2}{\mu\alpha}$ 得 $1=\frac{2AE}{\alpha}$ ，即 $E=\frac{\alpha}{2A}$。与椭圆只差 $1-e^2$ 换成 e^2-1 ，故 E 变号。

4.4.3 斥力场与 Rutherford 公式

(2) 斥力场： $\alpha<0$. 如 $\alpha=-kq_1q_2<0$ （同号电荷）： Coulomb 排斥力场。此时 $\alpha/|\alpha|=-1$ ，

$$r=\frac{p}{-1+e\cos\theta}.$$

$r>0$ 要求 $e\cos\theta>1$ ，故必有 $e>1$ （与 $E=\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{|\alpha|}{r}>0$ 一致）： 轨道是双曲线中背离力心 q_2 的那一支（实线）。

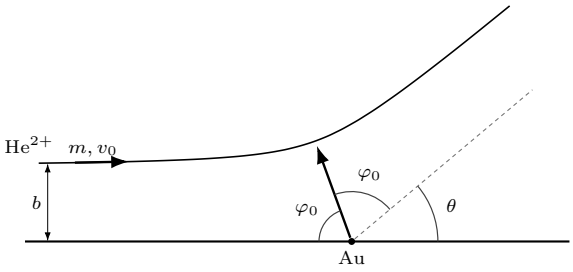


近心点（ $\theta=0$ ）到 q_2 的距离为 $C+A$ ：

$$B^2=C^2-A^2,\qquad e=\frac{C}{A}>1,\qquad \frac{p}{-1+e}=A(1+e),$$

$$p = A\big(e^2-1\big) = \frac{B^2}{A} = \frac{L^2}{\mu\,|\alpha|} = A\Big(\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} L = \sqrt{\dfrac{\mu\,|\alpha|}{A}}\,B, \\ E = \dfrac{|\alpha|}{2A} > 0. \end{cases}$$

例：Rutherford 公式. α 粒子（ He^{2+} ，质量 m ，入射速率 v_0 ，瞄准距离 b ）射向金核 Au 而散射（「α 粒子」之名与力常量 α 无关）。Au 的质量远大于 m ，视为不动的力心， $\mu \approx m$。页边注：「原子有核」模型（ $\mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$ ）。



θ 为散射角； φ 为以 Au 为极点、极轴沿轨道对称轴（ Au 指向近心点，图中箭头）的极角， $\pm\varphi_0$ 为两条渐近线方向。按 §3.5.3 ， $b = b(\theta)$ ； I 为束流强度，单位时间散射进 $\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$ 环带（立体角 $\mathrm{d}\Omega$ ）的粒子数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{散射}} = \sigma(\theta)\, I\ \mathrm{d}\Omega, \qquad \mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\ \mathrm{d}\theta, \qquad \sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|.$$

> 各量含义：
>
> - $\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{散射}}$ ：每秒偏转到 $\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$ 的粒子数，即探测器的计数率。
> - I ：束流强度，每秒穿过单位垂直截面积的入射粒子数。
> - $\mathrm{d}\Omega$ ：这些方向在单位球面上是一条环带，周长 $2\pi\sin\theta$、宽 $\mathrm{d}\theta$ ，面积即立体角。
> - $\sigma(\theta)$ ：微分散射截面， $\sigma\ \mathrm{d}\Omega$ 是面积：入射束中这么大面积内的粒子会落进该环带。
>
> 来由： $b \sim b + \mathrm{d}b$ 的圆环（面积 $2\pi b\ \mathrm{d}b$ ）每秒有 $I \cdot 2\pi b\ \mathrm{d}b$ 个粒子，恰好偏到 $\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$ ；令其等于 $\sigma I\ \mathrm{d}\Omega$ 即得 σ。b 越大偏得越少， $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} < 0$ ，故取绝对值。

入射时远离 Au ，势能为零；对 Au 的力臂为 b ：

$$E = \tfrac{1}{2}mv_0^2, \qquad L = mv_0 b.$$

轨道为斥力双曲线 $r = \dfrac{p}{-1 + e\cos\varphi}$ ， $r \to \infty$ 对应 $\cos\varphi_0 = \dfrac{1}{e}$ ；两条渐近线与对称轴各成 φ_0 ，故

$$\theta = \pi - 2\varphi_0, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{1}{e}, \qquad e^2 - 1 = \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \quad (\alpha = -kq_1q_2).$$

由 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ ， $\tan\varphi_0 = \sqrt{\sec^2\varphi_0 - 1} = \sqrt{e^2-1}$ ，代入 $2EL^2 = mv_0^2 \cdot m^2v_0^2b^2$ ：

$$\cot\frac{\theta}{2} = \tan\varphi_0 = \sqrt{e^2-1} = \sqrt{\frac{mv_0^2\, m^2v_0^2b^2}{m\alpha^2}} = \frac{mv_0^2}{|\alpha|}\,b,$$

$$b = \frac{|\alpha|}{mv_0^2}\cot\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\frac{|\alpha|}{mv_0^2}.$$

代入截面公式，并用 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ：

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{1}{4}\Big(\frac{\alpha}{mv_0^2}\Big)^2\,\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

4.4.4 Runge-Lenz 矢量



$\longrightarrow$ 若不闭合则无周期!

平方反比力场中，除 E、$\vec{L}$ 外还有一个守恒矢量（下文 $\vec{B}$ 是这个矢量， $B=\left|\vec{B}\right|$ ，与半短轴无关）：

$$\vec{B}=\mu\vec{v}\times\vec{L}-\mu\alpha\,\hat{r},\qquad \vec{\omega}=\frac{\vec{L}}{\mu r^2},$$

$\vec{v}=\dot{\vec{r}}$ 为相对速度， $\vec{\omega}$ 为 $\vec{r}$ 转动的角速度矢量（大小 $\dot{\theta}=\frac{L}{\mu r^2}$ ，方向沿 $\vec{L}$ ），故 $\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\hat{r}$。守恒： $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$ ， $\frac{\mathrm{d}(\mu\vec{v})}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ ，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\mu\vec{v})}{\mathrm{d}t}\times\vec{L}-\mu\alpha\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\Big(-\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}\Big)\times\vec{L}-\mu\alpha\,\frac{\vec{L}\times\hat{r}}{\mu r^2}=0$$

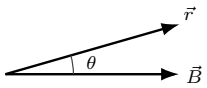
（ $-\hat{r}\times\vec{L}=\vec{L}\times\hat{r}$ ，两项恰好相消）。

各项. $\mu\vec{v}$ 是相对运动的动量； $\mu\vec{v}\times\vec{L}$ 是它与角动量的叉积； $\mu\alpha\,\hat{r}$ 沿 $\hat{r}$、大小恒为 $\mu\alpha$。$\vec{\omega}$ 描述 $\hat{r}$ 怎么转：大小 $\dot{\theta}$（由 $L=\mu r^2\dot{\theta}$ ），方向垂直轨道平面、沿 $\vec{L}$；它随 r 变、不守恒，只是用来写 $\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$ 的工具。守恒的是 $\vec{B}$。

求导三步.

- 乘积求导： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\vec{v}\times\vec{L})=\frac{\mathrm{d}(\mu\vec{v})}{\mathrm{d}t}\times\vec{L}+\mu\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ， $\vec{L}$ 守恒故后项为零； $\mu\alpha$ 是常量，只对 $\hat{r}$ 求导。
- 代入： $\frac{\mathrm{d}(\mu\vec{v})}{\mathrm{d}t}$ 由牛顿第二定律等于力 $-\frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$ ； $\hat{r}$ 长度不变、只会转， $\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\hat{r}=\frac{\vec{L}\times\hat{r}}{\mu r^2}$ （即 $\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\hat{\theta}$ ）。
- 相消：叉积交换次序变号，第一项 $=+\frac{\alpha}{r^2}\vec{L}\times\hat{r}$ ；第二项 μ 约掉， $=-\frac{\alpha}{r^2}\vec{L}\times\hat{r}$。和为零。

两项都含 $\frac{1}{r^2}$ 才能抵消，故只有平方反比力有此守恒量。



轨道方程：记 θ 为 $\vec{r}$ 与固定矢量 $\vec{B}$ 的夹角。用 $\vec{r}\cdot(\mu\vec{v}\times\vec{L})=\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\mu\vec{v})=L^2$、$\vec{r}\cdot\hat{r}=r$ ：

$$\vec{r}\cdot\vec{B}=rB\cos\theta=\vec{r}\cdot(\mu\vec{v}\times\vec{L})-\mu\alpha r=L^2-\mu\alpha r,$$

$$(\mu\alpha+B\cos\theta)\,r=L^2,\qquad r=\frac{L^2}{\mu\alpha+B\cos\theta}=\frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+e\cos\theta}$$

（分子分母同除以 $\mu\,|\alpha|$ ），与比奈方程的结果相同，且

$$p=\frac{L^2}{\mu\,|\alpha|},\qquad e=\frac{B}{\mu\,|\alpha|},\qquad B^2=\mu^2\alpha^2\Big(1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}\Big).$$

$\vec{B}$ 的直观. 由 $r=\frac{L^2}{\mu\alpha+B\cos\theta}$ ， $\theta=0$ （ $\vec{r}$ 与 $\vec{B}$ 同向）时 r 最小： $\vec{B}$ 从力心指向近日点（近心点），大小 $B=\mu\,|\alpha|\,e$ 正比于偏心率。一个矢量记下了轨道的朝向（长轴方向）和扁的程度；圆轨道 $e=0$ ， $\vec{B}=0$。

守恒的意义. 近日点在空间中固定不动，轨道每圈回到原处、闭合，才有周期（即开头小图「若不闭合则无周期」）。偏离平方反比的力场中近日点会逐圈转动，轨道不闭合。

4.4.5 线性引力场

$\vec{F}=-k\vec{r}$ ， $k>0$ （固定力心； k 为力常量，不是静电力常量）。以力心为势能零点，则

$$E_p(r)=\int_r^0(-kr')\,\mathrm{d}r'=\tfrac{1}{2}kr^2.$$

仍是有心力， $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\text{const}\implies$ 平面曲线轨道。在轨道平面内取 x、y 轴：

$$E=\tfrac{1}{2}m\big(\dot{x}^2+\dot{y}^2\big)+\tfrac{1}{2}kr^2,$$

$$m\ddot{x}=-kx,\quad m\ddot{y}=-ky\quad\Longrightarrow\quad\ddot{x}=-\omega^2x,\quad\ddot{y}=-\omega^2y,\qquad\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

两个方向各自做同频简谐振动。合成：令复数 $\tilde{r}=x+iy$ ，则

$$\ddot{\tilde{r}}=-\omega^2\tilde{r},\qquad\tilde{r}=A_+e^{i(\omega t+\phi_+)}+A_-e^{-i(\omega t-\phi_-)}$$

（ $A_\pm\geq0$、$\phi_\pm$ 为积分常量：一个逆时针、一个顺时针的匀速圆周运动之和）。把坐标轴转过 $-\theta$ （ θ 为常数，不是极角），新坐标 $\tilde{r}'=x'+iy'=e^{i\theta}\tilde{r}$ ：

$$\tilde{r}'=A_+e^{i(\omega t+\phi_++\theta)}+A_-e^{-i(\omega t-\phi_--\theta)}.$$

取 $\theta=-\frac{\phi_++\phi_-}{2}$ ，两个相位凑成同一个 $\psi=\omega t+\frac{\phi_+-\phi_-}{2}$ ：

$$\tilde{r}'=A_+e^{i\psi}+A_-e^{-i\psi}.$$

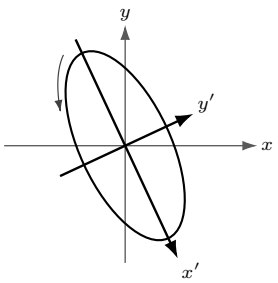
取实部、虚部（ $e^{\pm i\psi}=\cos\psi\pm i\sin\psi$ ）：

$$x'=(A_++A_-)\cos\psi,\qquad y'=(A_+-A_-)\sin\psi\quad\Longrightarrow\quad\frac{x'^2}{(A_++A_-)^2}+\frac{y'^2}{(A_+-A_-)^2}=1.$$

为何用复数. 平面上一点 (x,y) 记成一个数 $\tilde{r}=x+iy$ ，有两个好处。其一， x、y 满足同一方程，两式并成一式 $\ddot{\tilde{r}}=-\omega^2\tilde{r}$。其二，乘 $e^{i\theta}$ 就是把点绕原点转 θ ，转坐标只需一次乘法。

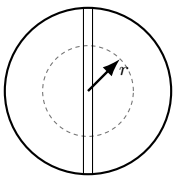
各步的图像.

- $A_+e^{i(\omega t+\phi_+)}$ 是长 A_+、逆时针匀速转的箭头， $A_-e^{-i(\omega t-\phi_-)}$ 是长 A_-、顺时针转的箭头；质点位置是两箭头首尾相接之和。
- 两箭头反向转，总会同时指向某一方向；选 θ 把 x' 轴转到该方向，两相位便写成 $\pm\psi$。
- $\psi=0$ ：两箭头都沿 x' ，相加得 A_++A_- ； $\psi=\frac{\pi}{2}$ ：一上一下，相减得 A_+-A_-。即半轴为 $A_+\pm A_-$ 的椭圆，再由 $\cos^2\psi+\sin^2\psi=1$ 得方程。



与平方反比力场的区别：力心在椭圆中心（平方反比力场中力心在焦点）！

匀质球（地球，质量 M_e、半径 R_e ）内沿直径挖一条贯穿球心的隧道，质点 m 在隧道中距球心 r 处：



它只受半径 r 以内质量 $M(r)=M_e\frac{r^3}{R_e^3}$ 的引力（ §2.2.2 ，外层球壳合力为零），用 $g=\frac{GM_e}{R_e^2}$ ：

$$-\frac{GM(r)m}{r^2}\,\hat{r}=-\frac{GM_em}{R_e^3}\,\vec{r}\ \sim\ -k\vec{r},\qquad k=\frac{mg}{R_e},$$

正是线性引力场，周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}},$$

与贴地面做圆周运动的周期相等。

4.4.6 宇宙速度

贴地圆周运动（**第一宇宙速度** v_1 ）：

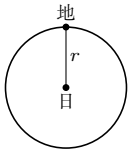
$$m\frac{v_1^2}{R_e}=\frac{GM_em}{R_e^2}=mg,\qquad v_1=\sqrt{\frac{GM_e}{R_e}}=\sqrt{gR_e}\approx 7.9\ \text{km/s},\qquad T=\frac{2\pi R_e}{\sqrt{gR_e}}=2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}.$$

自地面恰好逃离地球引力（到无穷远时动能为零）：

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GM_em}{R_e}=0,\qquad v_2=\sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}=\sqrt{2}\,v_1=11.2\ \text{km/s}\quad（\textbf{第二宇宙速度}）.$$

只受引力，机械能守恒：左边是地面上的总能量 E （动能 + 势能 $-\frac{GM_em}{R_e}$ ）。到无穷远时势能为零（零点取在无穷远），动能 ≥ 0 ，故能到达无穷远要求 $E\geq 0$。「恰好逃离」取最小值 $E=0$ ：到无穷远时速度刚好减为零。这正是 §4.4.1 中 $E=0$ 的抛物线轨道， $E<0$ 则是椭圆、回得来。能量与方向无关，故 v_2 不论朝哪个方向发射（不撞地面）都一样；忽略空气阻力与地球自转。

第三宇宙速度（自地面出发、逃离太阳系）：日地距离 $r=1.5\times10^8\ \text{km}\gg R_e=6.37\times10^3\ \text{km}$ ，故物体脱离地球引力的过程中，到太阳的距离始终可取为 r。



太阳参考系（下标 s ）中，在 r 处逃离太阳引力所需的速率与地球公转（圆轨道）速率分别为

$$v_{2s}=\sqrt{\frac{2GM_{\text{日}}}{r}}\approx 42.1\ \text{km/s},\qquad v_{1s}=\sqrt{\frac{GM_{\text{日}}}{r}}\approx 29.8\ \text{km/s}.$$

两者是把第一、第二宇宙速度的算法搬到太阳身上， R_e、M_e 换成 r、$M_{\text{日}}$ ：

- v_{2s} ：在地球轨道处逃离太阳所需的速率，由 $\frac{1}{2}mv_{2s}^2-\frac{GM_{\text{日}}m}{r}=0$。
- v_{1s} ：地球绕太阳公转的速率，由引力充当向心力 $m\frac{v_{1s}^2}{r}=\frac{GM_{\text{日}}m}{r^2}$。

地面上的物体本就随地球以 v_{1s} 运动，只需相对地球再补上差额 $\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s}$。

地心系中，物体脱离地球引力后相对地球的速度须为 $\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s}$ （其中 $\vec{v}_{1s}$ 为地球公转速度），对物体用机械能守恒：

$$\tfrac{1}{2}mv_3^2-\frac{GM_em}{R_e}=\tfrac{1}{2}m\big(\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s}\big)^2,$$

右边在 $\vec{v}_{2s}$ 与 $\vec{v}_{1s}$ 同向（顺着地球公转方向发射）时最小，为 $\frac{1}{2}m(v_{2s}-v_{1s})^2$。再用 $\frac{2GM_e}{R_e}=v_2^2$ ：

$$v_3=\sqrt{\big(v_{2s}-v_{1s}\big)^2+v_2^2}\approx 16.7\ \text{km/s}.$$

两步. 先在地心系中脱离地球引力，再在太阳系中逃离太阳。

- $\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s}$ ：脱离地球引力后，物体相对地球的速度。太阳系中速度 = 相对地球的速度 + 地球速度 $\vec{v}_{1s}$ ；要前者为 $\vec{v}_{2s}$ ，相对速度须为两者之差。
- $\frac{1}{2}m(\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s})^2$ ：此时地心系中的动能；物体已远离地球，地球势能为零，故它就是右边的总能量。

为何地心系里只算地球引力. 地心系随地球绕日加速，但 $r\gg R_e$ ，物体与地球离太阳几乎一样远，太阳给两者的加速度相同，在地心系中抵消。于是地面能量（左边） = 远处能量（右边）。

为何同向最小. $|\vec{v}_{2s}-\vec{v}_{1s}|$ 在两者同向时最小，为 $v_{2s}-v_{1s}$ ：顺着公转发射，地球的速度全借上。

附录　公式定理总结

通用记号：字母上加点表示对时间 t 求导；戴箭头的是矢量，戴帽的是单位矢量，同一字母不戴箭头表示其大小；m 为质量，$\vec{r}$ 为位矢（由参考点指向质点），$\vec{v}$、$\vec{a}$ 为速度、加速度，$\vec{F}$ 为合力；下标 0 表示初始值，下标 C 表示质心的量。

1　质点运动学

名称	公式	符号与条件
速度与加速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\quad \vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	直角分量 $v_x=\dot{x}$，$a_x=\ddot{x}$，各方向独立
匀变速运动	$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t,\quad \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$	$\vec{a}$ 为常矢量（如 $\vec{g}$）；末式用于直线运动，x 为坐标
由 $a(x)$ 求 $v(x)$	$a=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}x}$	加速度只依赖位置时用，可消去 t
圆周运动	$v=R\omega,\quad a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\beta$ $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2R$	R：半径；$\omega=\dot{\theta}$：角速度；$\beta=\ddot{\theta}$：角加速度；a_τ、a_n：切向、法向（指向圆心）加速度
角速度矢量	$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},\quad \vec{a}=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$	$\vec{\omega}$ 沿转轴，指向按右手螺旋定则；$\vec{\beta}=\dot{\vec{\omega}}$；$\vec{r}$ 自轴上一点引出
矢量求导	$\dot{\vec{A}}=\dot{A}\,\hat{A}+\vec{\omega}_A\times\vec{A}$	A、$\hat{A}$：$\vec{A}$ 的大小与方向；$\vec{\omega}_A$：$\hat{A}$ 转动的角速度
简谐振动	$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad x=A\cos(\omega t+\phi_0)$ $T=\dfrac{2\pi}{\omega},\quad$ 弹簧振子 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	x：离平衡位置的位移；A：振幅；ϕ_0：初位相；T：周期；k：劲度系数
自然坐标	$\vec{v}=v\,\hat{\tau},\quad \vec{a}=\dot{v}\,\hat{\tau}+\dfrac{v^2}{\rho}\,\hat{n}$	$\hat{\tau}$：切向（沿速度）；$\hat{n}$：法向（指向曲率中心）；ρ：曲率半径
曲率半径	$\rho=\dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{\lvert y''\rvert}=\dfrac{v^2}{a_n}$	曲线 $y=y(x)$，$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；$a_n$：法向加速度
极坐标	$\vec{v}=\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$ $\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$	$\hat{r}$、$\hat{\theta}$：径向、角向单位矢量（正文记作 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$）；$\dot{\hat{r}}=\dot{\theta}\,\hat{\theta}$，$\dot{\hat{\theta}}=-\dot{\theta}\,\hat{r}$；柱坐标即再加上 z 分量
球坐标	$\vec{v}=\dot{r}\,\hat{r}+r\dot{\theta}\,\hat{\theta}+r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}$ $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi,\quad \mathrm{d}\Omega=\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$	θ：与 z 轴的夹角；ϕ：经度；$\mathrm{d}V$：体积元；$\mathrm{d}\Omega$：立体角元，全空间共 4π
相对平动	$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_{O'},\quad \vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_{O'}$ $\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_{O'}$	带撇：在动系 S' 中测量；$\vec{v}_{O'}$、$\vec{a}_{O'}$：S' 原点的速度、加速度，即牵连速度、牵连加速度
刚性杆约束	$v_{A\parallel}=v_{B\parallel}$	杆两端 A、B 沿杆方向的速度分量相等

名称	公式	符号与条件
转动参考系	$\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_S = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$ $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$ $\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \vec{\beta}\times\vec{r}'$	S' 相对 S 以 $\vec{\omega}$ 转动，原点重合；$2\vec{\omega}\times\vec{v}'$：科里奥利加速度；$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -\omega^2\vec{r}'_\perp$：向心加速度，$\vec{r}'_\perp$ 为 $\vec{r}'$ 垂直于转轴的分量
Galileo 变换	$t' = t,\quad x' = x - vt,\quad y' = y,\quad z' = z$ $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v},\quad \vec{a}' = \vec{a}$	S' 相对 S 以 $\vec{v} = v\,\hat{x}$ 匀速运动；$\vec{u}$：质点速度；力学定律在各惯性系中形式相同

2 牛顿定律 动量定理

名称	公式	符号与条件
牛顿第一定律	不受力的物体保持静止或匀速直线运动状态	牛顿第一定律成立的参考系为惯性系
牛顿第二定律	$\vec{F} = m\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	惯性系中；$\vec{p} = m\vec{v}$：动量
牛顿第三定律	$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$	$\vec{F}_{1\to2}$：1 施于 2 的力；两力沿两质点连线
量纲	$[F] = MLT^{-2},\quad [E] = ML^2T^{-2}$	M、L、T：质量、长度、时间的量纲。量纲相同才能相加减、相等；$\sin x$、e^x、$\ln x$ 中 x 无量纲
万有引力定律	$\vec{F}_{1\to2} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{1\to2}$	r_{12}：间距；$\hat{r}_{1\to2}$：由 1 指向 2；$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$；地面 $g = GM_e/R_e^2$
引力场 Gauss 定理	$\oiint_S \vec{E}_G\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi GM_{\text{内}}$	$\vec{E}_G = \vec{F}/m_0$：引力场强；S：闭合曲面；$M_{\text{内}}$：S 内总质量
球对称质量分布	$\vec{E}_G = -\dfrac{GM(r)}{r^2}\,\hat{r}$	$M(r)$：半径 r 以内的质量，等效于集中在球心；均匀球壳内 $\vec{E}_G = 0$
Coulomb 定律	$\vec{F}_{1\to2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{1\to2}$	q_1、q_2：电量（带正负号）；$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$
电场强度	$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0},\quad$ 点电荷 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$	q_0：试探电荷；场强满足叠加原理
电场 Gauss 定理	$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{内}}}{\varepsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$Q_{\text{内}}$：S 内总电量；ρ：电荷体密度；$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$
惯性力	$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}},\quad \vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_{\text{牵}}$	非惯性系 S' 中；$\vec{a}_{\text{牵}}$：牵连加速度；平动系 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}_{O'}$
转动系惯性力	$\vec{F}_c = m\omega^2\vec{r}'_\perp,\quad \vec{F}_{\text{cor}} = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ $\vec{F}_{\text{横}} = m\vec{r}'\times\vec{\beta},\quad E_{pc} = -\frac{1}{2}m\omega^2r_\perp^2$	依次为惯性离心力、科氏力、横向惯性力（$\vec{\omega}$ 变时才有）、离心势能（$\vec{\omega}$ 恒定）；$r_\perp$：到转轴的距离；科氏力不做功
约化质量	$\mu = \dfrac{m_Am_B}{m_A+m_B},\quad \vec{F}_B = \mu\,\vec{a}_{B\text{对}A}$	孤立两体；$\vec{F}_B$：A 施于 B 的力；$\vec{a}_{B\text{对}A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$
动量定理	$\vec{I} = \displaystyle\int \vec{F}\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{p},\quad \int \vec{F}_{\text{合外}}\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{P}$	$\vec{I}$：冲量；$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i$：质点系总动量；内力不改变总动量
质心运动定理	$\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m},\quad \vec{P} = m\vec{v}_C$ $\vec{F}_{\text{合外}} = m\vec{a}_C$	$m = \sum_i m_i$：总质量
动量守恒定律	$\vec{F}_{\text{合外}} = 0 \implies \vec{P} =$ 常矢量	某方向外力分量为零，则该方向动量守恒

3 能量

名称	公式	符号与条件
功	$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r},\quad W_{a\to b}=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	沿实际路径积分；功依赖路径与参考系
一对内力的功	$\mathrm{d}W_{\text{和}}=F_{2\to1}\,\mathrm{d}r_{12}$	r_{12}：间距；$F_{2\to1}$：2 对 1 的力（斥力为正）；与参考系无关，刚体内力做功为零
动能定理	$\mathrm{d}W=\mathrm{d}E_k,\quad E_k=\frac{1}{2}mv^2$ 质点系：$\mathrm{d}E_k=\mathrm{d}W_{\text{外}}+\mathrm{d}W_{\text{内}}$	W：合力的功；内力的功一般不为零
柯尼希定理	$E_k=\frac{1}{2}mv_C^2+E_k';\quad$ 两体 $E_k'=\frac{1}{2}\mu v_{\text{相对}}^2$	E_k'：质心系中的动能（资用能）；μ：约化质量；$v_{\text{相对}}=\lvert\vec{v}_1-\vec{v}_2\rvert$
保守力	$\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\iff\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$	L：任一闭合路径；恒力、有心力 $F(r)\,\hat{r}$ 都是保守力
势能	$E_p(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r},\quad\vec{F}=-\vec{\nabla}E_p$	$\vec{r}_0$：势能零点；保守力做的功等于势能的减少
常用势能	重力 mgh，弹力 $\frac{1}{2}kx^2$ 万有引力 $-\dfrac{GMm}{r}$	h：高度；k：劲度系数；x：形变量；r：到 M 的距离（零点在无穷远）
静电场环路定理	$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0,\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$	静电场无旋；与 Gauss 定理合为静电场方程
电势	$U(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r},\quad\vec{E}=-\vec{\nabla}U$ 点电荷 $U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，电势能 $W_e=q_0U$	$\vec{r}_0$：电势零点（常取无穷远）；电势满足叠加原理
静电平衡	导体内部 $\vec{E}=0$	导体为等势体，电荷只分布在表面
机械能定理	$E=E_k+E_p,\quad\mathrm{d}E=\mathrm{d}W_{\text{外非保}}+\mathrm{d}W_{\text{内非保}}$	E_p 含外、内保守力的势能；非保守力做功为零则机械能守恒
微振动（能量法）	$k=E_p''(x_0),\quad m=a(x_0),\quad\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$	单自由度；x_0：稳定平衡位置，$E_p'(x_0)=0$；动能写成 $E_k=\frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$
碰撞	动量守恒；$\quad v_2-v_1=e\,(v_{10}-v_{20})$	e：恢复系数，$e=1$ 弹性、$e=0$ 完全非弹性（碰后共速）；下标 0：碰前
斜碰	光滑接触：切向速度分量不变，法向按一维碰撞处理	法向：沿接触面法线（两球为连心线）；有摩擦且全程滑动时，切向冲量 $=\mu\times$ 法向冲量
散射截面	$\sigma(\theta)=\dfrac{b}{\sin\theta}\left\lvert\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right\rvert,\quad\mathrm{d}\sigma=\sigma(\theta)\,\mathrm{d}\Omega$	b：瞄准距离；θ：散射角；$\mathrm{d}\Omega$：立体角元

4 角动量

名称	公式	符号与条件
角动量与力矩	$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v},\quad\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F},\quad M=Fh$	$\vec{L}$、$\vec{M}$ 对同一参考点；h：力臂
角动量定理	$\vec{M}_{\text{外}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},\quad\int\vec{M}_{\text{外}}\,\mathrm{d}t=\Delta\vec{L}$	$\vec{M}_{\text{外}}$：外力矩之和（质点系内力矩成对抵消）
角动量守恒定律	$\vec{M}_{\text{外}}=0\implies\vec{L}=$ 常矢量	$M_{\text{外},z}=0$ 则 L_z 守恒

名称	公式	符号与条件
换参考点	$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \vec{R} \times \vec{F}_{\text{合外}}$ $\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \vec{R} \times \vec{P}$	$\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$；$\vec{P}$：总动量；力偶（合力为零）的力矩与参考点无关，$M = Fh$
角动量分解	$\vec{L}_O = \vec{L}_{\text{对}C} + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$	$\vec{L}_{\text{对}C}$：质心系中对质心的角动量
质心系角动量定理	$\vec{M}_{\text{外},\text{对}C} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{对}C}}{\mathrm{d}t}$	质心有加速度时也成立
重心	重力矩 $= \vec{r}_C \times m\vec{g}$，　重力势能 $= mgh_C$	$\vec{g}$ 恒定时重力等效于作用在质心
转动惯量	$I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 \,\mathrm{d}m$	R：质元到转轴的距离
定轴转动	$M_z = I\beta$，　$L_z = I\omega$，　$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$	转轴为 z 轴；M_z、L_z：外力矩、角动量的轴向分量；一般 $\vec{L} \neq I\vec{\omega}$
质心轴转动定理	$M_{\text{外},z,\text{对}C} = I_C\beta$	质心轴：过质心且平行于转轴；I_C：对质心轴的转动惯量
转动的功	$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\theta$，　$W_{\text{外}} = \Delta\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$	刚体内力不做功；保守力 $M = -\frac{\partial E_p}{\partial\theta}$
平行轴定理	$I = I_C + md^2$	d：两平行轴间距
垂直轴定理	$I_z = I_x + I_y$	薄板；x、y 轴在板面内，z 轴垂直于板面，三轴共点
常用转动惯量	细杆 $\frac{1}{12}ml^2$（过中点）、$\frac{1}{3}ml^2$（过端点） 圆环 mR^2，　圆盘 $\frac{1}{2}mR^2$ 球壳 $\frac{2}{3}mR^2$，　球体 $\frac{2}{5}mR^2$	匀质；杆的轴垂直于杆，环、盘的轴过圆心且垂直于盘面，球的轴过球心
不打滑约束	$v = \omega R$，　$a = \beta R$	绳与滑轮（半径 R）间无相对滑动
单摆、复摆	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_O}{mgl_C}}$	小角摆动；l：摆长；I_O：对转轴的转动惯量；l_C：质心到转轴的距离
两体有心力	$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2\mu r^2} + E_p(r)$ $L = \mu r^2\dot{\theta}$	r：两体间距；μ：约化质量；E、L 守恒；有效势 $\frac{L^2}{2\mu r^2} + E_p$；折返点 $\dot{r} = 0$
比奈方程	$-\dfrac{L^2}{\mu}u^2\left(u'' + u\right) = F\left(u^{-1}\right)$	$u = 1/r$，$u'' = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$；$F$：有心力的径向分量（斥力为正）
平方反比力轨道	$r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$，　$p = \dfrac{L^2}{\mu\alpha}$ $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$	$E_p = -\alpha/r$，引力 $\alpha = GMm$；θ 自近心点量起；$e < 1$ 椭圆、$= 1$ 抛物线、> 1 双曲线；斥力（$\alpha < 0$）分母为 $e\cos\theta - 1$，p 中用 $\lvert\alpha\rvert$
椭圆轨道	$E = -\dfrac{\alpha}{2A}$，　$L = \sqrt{\dfrac{\mu\alpha}{A}}\,B$ $e = \dfrac{C}{A}$，　$p = \dfrac{B^2}{A}$	A、B：半长轴、半短轴；$C = \sqrt{A^2 - B^2}$：中心到焦点的距离；双曲线 $E = \frac{\lvert\alpha\rvert}{2A}$
开普勒定律	①轨道是椭圆，太阳在一个焦点 ②面积速度 $L/(2\mu)$ 守恒 ③ $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}A^3$	M、m：太阳、行星质量；T：周期；A：半长轴
Rutherford 公式	$\sigma(\theta) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\alpha}{mv_0^2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^4(\theta/2)}$	$\alpha = -kq_1q_2$；m、v_0：入射粒子的质量、速率；θ：散射角
宇宙速度	$v_1 = \sqrt{gR_e} \approx 7.9\,\mathrm{km/s}$, $v_2 = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11.2\,\mathrm{km/s}$ $v_3 \approx 16.7\,\mathrm{km/s}$	依次为贴地环绕、逃离地球、逃离太阳系所需的最小速率；距质量 M 中心 r 处的逃逸速度为 $\sqrt{2GM/r}$